VWO
B
DEEL 3

GETAL&
RUIMTE
3

NOORDHOFF UITGEVERS

GETAL& RUIMTE

vwo B deel 3

ELFDE EDITIE, 2015

J.H. Dijkhuis
C.J. Admiraal
J.A. Verbeek
G. de Jong
H.J. Houwing
J.D. Kuis
F. ten Klooster
S.K.A. de Waal
J. van Braak
J.H.M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M.L.M. van Maarseveen
R.D. Hiele
J.E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
I. Cornelisse

Noordhoff Uitgevers Groningen

Voorwoord

Aan de docent(e),

Het boek vwo B deel 3
Samen met de delen 1, 2 en 4 van vwo wiskunde B bevat dit boek de leerstof van het programma vwo wiskunde B, zoals dat met ingang van het jaar 2015 is vastgesteld. De totale studielast voor het vak vwo wiskunde B is 600 uur.
De delen 1, 2, 3 en 4 bevatten samen 17 hoofdstukken, waarbij opgemerkt moet worden dat in het laatste hoofdstuk van deel 4 de examentraining staat.
Deel 3 is bestemd voor het vijfde leerjaar. Afhankelijk van de verdeling van de studielast over de leerjaren vier, vijf en zes zal in het vijfde leerjaar naar verwachting eerst vwo B deel 2 moeten worden afgehandeld. Na deel 3 wordt in het zesde leerjaar nog deel 4 doorgewerkt.
In de vijf hoofdstukken van dit boek, die elk een studielast van ongeveer 30 uur hebben, komen de volgende (sub)domeinen aan de orde.
Hoofdstuk 9: B Functies, grafieken en vergelijkingen en C2 Technieken voor differentiëren, hoofdstuk 10: E2 Algebraïsche methoden in de vlakke meetkunde en E3 Vectoren en inproduct, hoofdstuk 11: C3 Integraalrekening, hoofdstuk 12: D Goniometrische functies en E3 Vectoren en inproduct en hoofdstuk K: F Keuzeonderwerpen.

Bespreking van de hoofdstukken
In hoofdstuk 9 wordt het begrip logaritme geïntroduceerd en worden de rekenregels voor logaritmen bewezen en gebruikt, bijvoorbeeld bij het oplossen van vergelijkingen. In de tweede helft van het hoofdstuk komt het getal e en de natuurlijke logaritme aan de orde, waarbij ook de afgeleiden van exponentiële en logaritmische functies worden behandeld.
Hoofdstuk 10 begint met vectorvoorstellingen van lijnen en hoeken en afstanden bij lijnen en cirkels. Verder worden vectoren gebruikt bij rotaties en het rekenen aan snelheid en versnelling bij bewegingsvergelijkingen.
In hoofdstuk 11 wordt eerst het begrip primitieve functie behandeld. Hiermee worden oppervlakten en inhouden berekend. Ook wordt gerekend aan snelheid en versnelling. Aan het eind van het hoofdstuk worden integralen numeriek berekend, zodat ook een toepassing als booglengte aan de orde kan komen.
In hoofdstuk 12 worden goniometrische formules gebruikt bij vergelijkingen, herleidingen, symmetrie en primitiveren. Ook de eenparige cirkelbewegingen en de harmonische trillingen ontbreken niet. De bewegingsvergelijkingen komen opnieuw aan de orde, maar nu met goniometrische formules.
In het keuzehoofdstuk K wordt de substitutiemethode en het partieel integreren aangeboden. Ook komen cyclometrische functies en het berekenen van primitieven met behulp van breuksplitsen aan de orde.
Men is vrij om een ander keuzeonderwerp te kiezen en hoofdstuk K over te slaan.

Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

najaar 2015

Legenda

1 **Voorkennis**
Kennis van enkele onderwerpen uit voorgaande hoofdstukken moet je paraat hebben.

O 2 **Oriënterende opgave**
Opgaven waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

T 3 [►►6] **Testopgave**
Een T-opgave volgt na een theorieblok. Als je de theorie en het voorbeeld goed begrijpt, dan kun je de testopgave maken. Gaat dit foutloos, dan mag je verder gaan met de opgave die achter ►► staat.

4 **Gewone opgave**
Na de theorie ga je oefenen met de gewone opgaven.

R 5 **Reflecterende opgave**
In een reflectieopgave kijk je nog eens terug op een voorgaand probleem.

A 6 **Afsluitende opgave**
De afsluitende opgaven geven het beoogde beheersingsniveau aan.

D 7 **Denkopgave**
Een D-opgave doet een extra beroep op je denkvermogen. De denkopgave hoort bij de behandelde theorie, maar vaak wordt in de opgave een probleem op een iets andere manier gepresenteerd.

[►WERKBLAD]
Verwijzing naar een werkblad.

Inhoud

Bij het zuiveren van afvalwater is het begrip biochemisch zuurstofverbruik (BZV) van belang. Hoe meer het water vervuild is, des te meer zuurstof nodig is om het water te zuiveren. Omdat de zuivering door micro-organismen gebeurt, is de afname van het BZV ook afhankelijk van de temperatuur. Bij een temperatuur van 10 °C is de halveringstijd van het BZV ruim vijf dagen, terwijl dat bij een temperatuur van 20 °C nog geen drie en een halve dag is.

Wat leer je?

- Wat een logaritme is.
- Oplossen van logaritmische vergelijkingen.
- De rekenregels voor logaritmen gebruiken.
- Berekenen van verdubbelingstijden en halveringstijden en werken met logaritmische schaalverdelingen.
- Werken met e-machten en natuurlijke logaritmen.
- Het differentiëren van exponentiële en logaritmische functies.

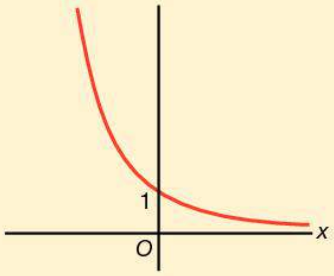
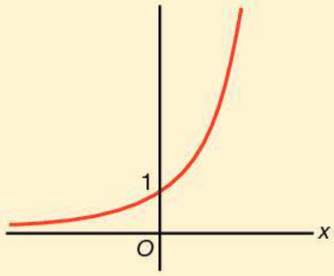
Exponentiële en logaritmische functies

9

Voorkennis Exponenten

Theorie A Exponentiële functies

De functie $f(x) = g^x$ met $g > 0 \wedge g \neq 1$ is een standaardfunctie.
De grafiek is een standaardgrafiek.

De standaardgrafiek $y = g^x$	
$\mathbf{0 < g < 1}$	$\mathbf{g > 1}$
	
dalend	stijgend
domein $\mathbb{R}$ bereik $\langle 0, \rightarrow \rangle$ de x-as (de lijn $y = 0$) is asymptoot	

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x-4} - 2$.

a Hoe ontstaat de grafiek van f uit een standaardgrafiek?
b Los op $f(x) \geq 0$. Rond in het antwoord af op twee decimalen.
c Bereken exact welke waarden $f(x)$ aanneemt voor $x \geq 0$.

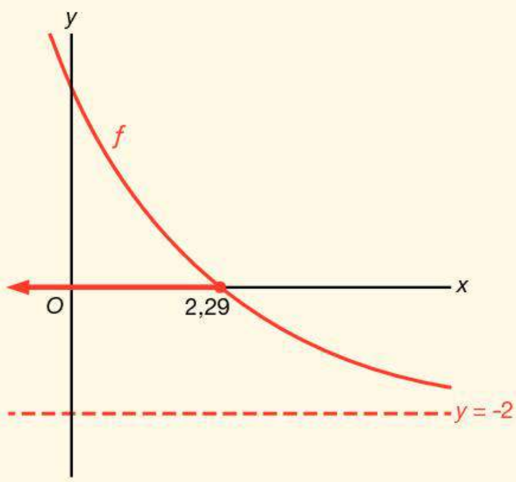
Uitwerking

a $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x \xrightarrow{\text{translatie } (4, -2)} y = \left(\frac{2}{3}\right)^{x-4} - 2$

b Voer in $y_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{x-4} - 2$.
De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x \approx 2{,}29$.
$f(x) \geq 0$ geeft $x \leq 2{,}29$

c $f(0) = \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} - 2 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 - 2 = 5\frac{1}{16} - 2 = 3\frac{1}{16}$
$x \geq 0$ geeft $-2 < f(x) \leq 3\frac{1}{16}$

Houd rekening met het bereik.



1 Gegeven zijn de functies $f(x) = \left(1\frac{1}{2}\right)^x - 3$ en $g(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^{x-1} + 2$.

a Hoe ontstaat de grafiek van f uit een standaardgrafiek? En de grafiek van g?

b Schets de grafieken van f en g in één figuur en geef B_f en B_g.

c Los op $f(x) \geq 0$. Rond in het antwoord af op twee decimalen.

d Bereken exact welke waarden $g(x)$ aanneemt voor $x \geq 0$.

e Los op $f(x) \leq g(x)$. Rond in het antwoord af op twee decimalen.

f Voor welke p heeft de vergelijking $f(x) = p$ geen oplossingen?

g De lijn $x = 2$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B.
Bereken de lengte van het lijnstuk AB.

h De lijn $y = 5$ snijdt de grafiek van f in het punt C en de grafiek van g in het punt D.
Bereken de lengte van het lijnstuk CD in twee decimalen nauwkeurig.

2 Bereken van de grafieken van de volgende functies de formule van de horizontale asymptoot.

a $f(x) = 4^{x-1} + 3$ **b** $g(x) = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$ **c** $h(x) = \frac{1}{2} \cdot 6^{3-x} - 2$

Theorie B Exponentiële vergelijkingen

Bij het algebraïsch oplossen van exponentiële vergelijkingen werk je vaak toe naar de vorm $g^A = g^B$. Daarna gebruik je $g^A = g^B$ geeft $A = B$.

Voorbeeld

Los algebraïsch op.

a $1 + 2 \cdot 3^{4x-1} = 55$

b $9 \cdot 3^{x-1} = 27^x$

c $3^{x+1} + 3^{x-1} = 30$

Uitwerking

a
$1 + 2 \cdot 3^{4x-1} = 55$
$2 \cdot 3^{4x-1} = 54$
$3^{4x-1} = 27$
$3^{4x-1} = 3^3$
$4x - 1 = 3$
$4x = 4$
$x = 1$

b
$9 \cdot 3^{x-1} = 27^x$
$3^2 \cdot 3^{x-1} = (3^3)^x$
$3^{x+1} = 3^{3x}$
$x + 1 = 3x$
$-2x = -1$
$x = \frac{1}{2}$

c
$3^{x+1} + 3^{x-1} = 30$
$3^x \cdot 3^1 + 3^x \cdot 3^{-1} = 30$
$3 \cdot 3^x + \frac{1}{3} \cdot 3^x = 30$
$3\frac{1}{3} \cdot 3^x = 30$
$3^x = 9$
$3^x = 3^2$
$x = 2$

3 Los algebraïsch op.

a $2 + 3 \cdot 2^{2x-1} = 98$
b $3^{4x-1} = \frac{1}{27}\sqrt{3}$
c $4 \cdot 2^{x-3} = 8^x$
d $\frac{1}{3} \cdot 9^x = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$
e $2^{x+1} + 2^{x-1} = 80$
f $2^{x+1} - 2^{x-1} = 96$
g $4^{x^2+2} = 8^{x^2-1}$
h $25 \cdot 5^{x-1} = 5 \cdot 0{,}2^x$
i $32 \cdot 2^{x-1} = \frac{1}{4} \cdot 8^x$

9

Theorie C Formules opstellen bij exponentiële groei

De formule bij exponentiële groei is van de vorm $N = b \cdot g^t$. Hierin is b de beginhoeveelheid en g de groeifactor per tijdseenheid.
Is bij een exponentiële groei het groeipercentage per dag gelijk aan 20%, dan is de groeifactor per dag 1,2.
Bij een groeifactor per dag van 1,2 hoort een groeifactor per week van $1{,}2^7 \approx 3{,}58$ en hierbij hoort een groeipercentage van 258%. Bij $g_{\text{dag}} = 1{,}2$ hoort $g_{\text{uur}} = 1{,}2^{\frac{1}{24}} \approx 1{,}0076$, dus het groeipercentage per uur is 0,76%.

Het omzetten van een groeipercentage naar een andere tijdseenheid gaat via groeifactoren.

Voorbeeld

Een hoeveelheid N groeit exponentieel. Op $t = 5$ is $N = 800$ en op $t = 9$ is $N = 1000$. Hierbij is t de tijd in uren.
Stel de formule op van N. Rond de groeifactor af op drie decimalen.

Uitwerking

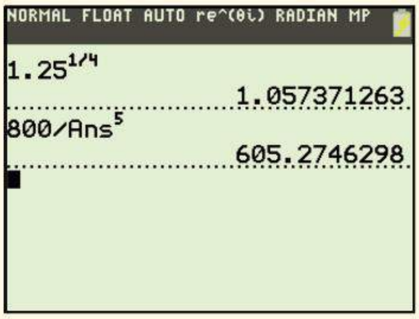
$N = b \cdot g^t$ met $g_{4\text{ uur}} = \dfrac{1000}{800} = 1{,}25$, dus

$g_{\text{uur}} = 1{,}25^{\frac{1}{4}} = 1{,}057...$

$$\left.\begin{array}{l} N = b \cdot 1{,}057...^t \\ t = 5 \text{ en } N = 800 \end{array}\right\} \; b \cdot 1{,}057...^5 = 800$$

$$b = \frac{800}{1{,}057...^5} \approx 605$$

Dus $N = 605 \cdot 1{,}057^t$.



4 Bij een exponentiële groei hoort een groei van 30% per dag.
- **a** Bereken het groeipercentage per week. Rond af op gehelen.
- **b** Bereken het groeipercentage per uur.

5
- **a** Een hoeveelheid neemt per dag met 5% af.
  Hoeveel procent is de afname per week?
- **b** Een hoeveelheid neemt per jaar met 4,75% toe.
  Hoeveel procent is de toename per 10 jaar?
- **c** Een hoeveelheid neemt per week met 140% toe.
  Hoeveel procent is de toename per dag?

6 Een hoeveelheid N groeit exponentieel. Op $t = 2$ is $N = 500$ en op $t = 5$ is $N = 600$. Hierbij is t de tijd in dagen.
Stel de formule op van N.

Rond groeifactoren af op drie decimalen tenzij anders wordt gevraagd.

7 Een hoeveelheid N neemt exponentieel af. Op $t = 8$ is $N = 1500$ en op $t = 15$ is $N = 1000$. Hierbij is t de tijd in dagen.
Stel de formule op van N.

9.1 Logaritmen

O 1 Vul in.

a $2^{\cdots} = 8$ **c** $2^{\cdots} = \sqrt{2}$ **e** $3^{\cdots} = \frac{1}{27}$

b $2^{\cdots} = \frac{1}{4}$ **d** $3^{\cdots} = 9$ **f** $3^{\cdots} = \sqrt[5]{3}$

Theorie A De logaritme

In opgave 1a heb je in moeten vullen tot welke macht je 2 moet verheffen om 8 te krijgen. Voor deze opdracht bestaat de notatie ${}^2\log(8)$.

- De notatie log komt van **logaritme**.
- In ${}^2\log(8)$ is 2 het **grondtal van de logaritme**.
- ${}^2\log(8)$ spreek je uit als de tweede logaritme van 8 of kortweg 2 log 8.

${}^2\log(8)$ is de exponent van het grondtal 2 waarmee de macht gelijk is aan 8. Deze exponent is 3, dus ${}^2\log(8) = 3$.
En zo is ${}^3\log\left(\frac{1}{81}\right)$ gelijk aan -4, want $\frac{1}{81}$ is 3^{-4}.

${}^3\log\left(\frac{1}{81}\right)$ is de exponent van het grondtal 3 waarmee de macht gelijk is aan $\frac{1}{81}$.

${}^g\log(x)$ is de exponent van het grondtal g waarmee de macht gelijk is aan x.
In ${}^g\log(x)$ heet g het grondtal van de logaritme.

Zoek je de uitkomst van ${}^3\log(3^4)$ dan is het antwoord natuurlijk 4.
Dus zoek je de uitkomst van ${}^3\log(81)$, dan bedenk je dat $81 = 3^4$, dus ${}^3\log(81) = {}^3\log(3^4) = 4$.
En zo is ${}^3\log(9\sqrt{3}) = {}^3\log\left(3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right) = {}^3\log\left(3^{2\frac{1}{2}}\right) = 2\frac{1}{2}$.

${}^g\log(g^a) = a$

Voorbeeld

Bereken.

a ${}^2\log\left(\frac{1}{8}\sqrt{2}\right)$
b ${}^5\log(0{,}04)$

Uitwerking

a ${}^2\log\left(\frac{1}{8}\sqrt{2}\right) = {}^2\log\left(2^{-3} \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right) = {}^2\log\left(2^{-2\frac{1}{2}}\right) = -2\frac{1}{2}$

b ${}^5\log(0{,}04) = {}^5\log\left(\frac{4}{100}\right) = {}^5\log\left(\frac{1}{25}\right) = {}^5\log(5^{-2}) = -2$

2 Bereken.

a ${}^5\log(125)$ **d** ${}^7\log(49)$ **g** ${}^4\log(0{,}25)$
b ${}^{10}\log(0{,}1)$ **e** ${}^2\log(\sqrt{2})$ **h** ${}^4\log(4)$
c ${}^2\log(4)$ **f** ${}^2\log(0{,}5)$ **i** ${}^4\log(1)$

3 Bereken.

a $^{2}\log\left(64\sqrt{2}\right)$

b $^{3}\log\left(\frac{1}{9}\sqrt{3}\right)$

c $^{3}\log\left(3^{21,5}\right)$

d $^{5}\log\left(\frac{1}{125}\right)$

e $^{\frac{1}{3}}\log\left(\frac{1}{27}\right)$

f $^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{4}\right)$

g $^{2}\log\left(\frac{1}{32}\cdot\sqrt[3]{2}\right)$

h $^{5}\log(1)$

i $^{3}\log\left(81\cdot\sqrt[5]{27}\right)$

O 4 Los op.

a $^{2}\log(x) = 3$

b $^{3}\log(x) = -2$

c $^{5}\log(x) = \frac{1}{2}$

Theorie B Logaritmische vergelijkingen

In opgave 4 kun je zien dat $^{g}\log(x) = y$ geeft $x = g^{y}$.
De **logaritmische vergelijking** $^{2}\log(x) = 5$ heeft als oplossing $x = 2^{5}$.
Immers $^{2}\log(2^{5}) = 5$.
En de vergelijking $^{2}\log(x + 3) = 5$ geeft $x + 3 = 2^{5}$, dus
$x = 2^{5} - 3 = 29$.

Uit $^{g}\log(x) = y$ volgt $x = g^{y}$.

Voorbeeld

Los algebraïsch op.

a $^{2}\log(2x - 1) = 3$

b $1 + 2\cdot{}^{5}\log(x) = 7$

Uitwerking

a $^{2}\log(2x - 1) = 3$

$2x - 1 = 2^{3}$

$2x - 1 = 8$

$2x = 9$

$x = 4\frac{1}{2}$

b $1 + 2\cdot{}^{5}\log(x) = 7$

$2\cdot{}^{5}\log(x) = 6$

$^{5}\log(x) = 3$

$x = 5^{3}$

$x = 125$

5 Los algebraïsch op.

a $^{3}\log(x + 2) = 2$

b $1 + {}^{\frac{1}{2}}\log(x) = 4$

c $^{3}\log(2x + 1) = 4$

d $5 + {}^{4}\log(x) = 3$

e $^{\frac{1}{2}}\log(x - 1) = 3$

f $^{2}\log(x^{2} - 4) = 5$

A 6 Bereken exact de oplossingen.

a $4\cdot{}^{3}\log(x) = 2$

b $^{3}\log(4x - 1) = -2$

c $3 + {}^{2}\log(x) = -1$

d $^{5}\log(3x + 2) = 1$

e $^{3}\log(0,4x - 5) = 2$

f $4 + 2\cdot{}^{2}\log(x) = 7$

9

O 7 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^x$ en $h(x) = {}^2\log(x)$.

a Vul de tabellen in.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2^x$							

x							
$y = {}^2\log(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3

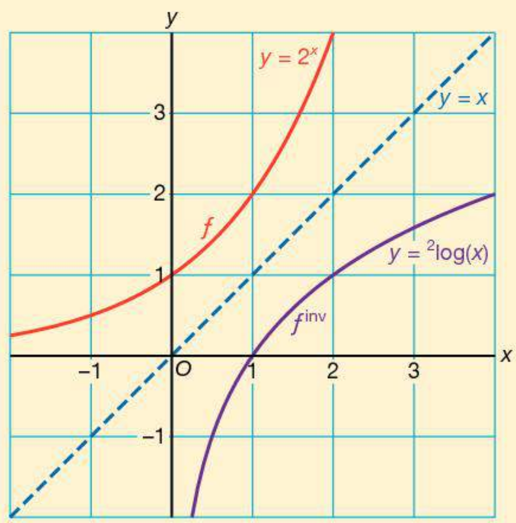
b Teken in één figuur de grafieken van f en h en de lijn $y = x$.

c Hoe ontstaat de grafiek van h uit die van f?

Theorie C De standaardgrafiek $y = {}^g\log(x)$

In opgave 7 heb je gezien dat de grafiek van $h(x) = {}^2\log(x)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = 2^x$ bij spiegelen in de lijn $y = x$.
De functies $f(x) = 2^x$ en $h(x) = {}^2\log(x)$ zijn dus elkaars inverse.
De exponentiële functie $f(x) = g^x$ heeft als inverse de **logaritmische functie** $f^{\text{inv}}(x) = {}^g\log(x)$.

In de figuur hiernaast zijn de grafieken van $f(x) = 2^x$ en $f^{\text{inv}}(x) = {}^2\log(x)$ getekend.
Je ziet dat $D_{f^{\text{inv}}} = B_f = \langle 0, \rightarrow\rangle$ en $B_{f^{\text{inv}}} = D_f = \mathbb{R}$.

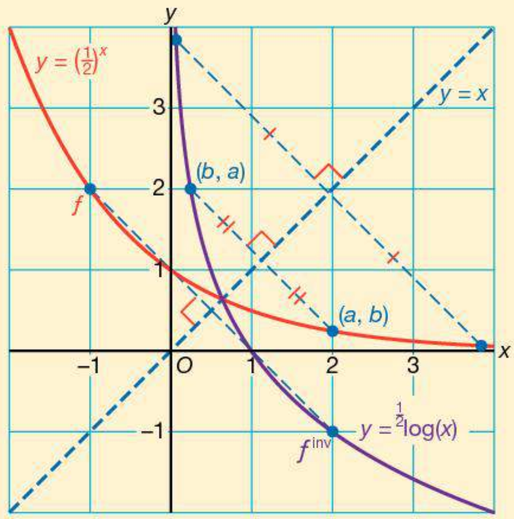


figuur 9.1

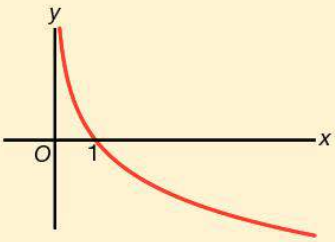
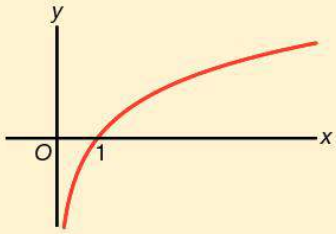
De grafiek van f heeft als horizontale asymptoot de x-as, dus de grafiek van h heeft als verticale asymptoot de y-as.

De logaritmische functie $f(x) = {}^g\log(x)$ is alleen gedefinieerd voor $g > 0$ en $g \neq 1$, heeft domein $\langle 0, \rightarrow\rangle$ en bereik $\mathbb{R}$.

In de figuur hiernaast zie je hoe de grafiek van de inverse van $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ eruit ziet.
Je krijgt $f^{\text{inv}}(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$.
De grafiek van f^{inv} is dalend en heeft de y-as als verticale asymptoot.
Verder is $D_{f^{\text{inv}}} = \langle 0, \rightarrow\rangle$ en $B_{f^{\text{inv}}} = \mathbb{R}$.



figuur 9.2

De standaardgrafiek $y = {}^{g}\log(x)$	
$0 < g < 1$	$g > 1$
 dalend	 stijgend
domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$ bereik $\mathbb{R}$ de y-as (de lijn $x = 0$) is asymptoot	

8 Gegeven is de functie $f(x) = {}^{3}\log(x)$.
- **a** Vul de tabel hiernaast in.
- **b** Teken de grafiek van f.
- **c** Los exact op $f(x) \leq 1\frac{1}{2}$.
- **d** Welke waarden neemt $f(x)$ aan voor $\sqrt{3} \leq x \leq 27$?

x					
$f(x)$	-2	-1	0	1	2

9 Gegeven is de functie $f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log(x - 2)$.
- **a** Vul de tabel hiernaast in.
- **b** Teken de grafiek van f.
- **c** Welke waarden neemt $f(x)$ aan voor $x \geq 2\frac{1}{8}$?
- **d** Los algebraïsch op $f(x) \geq -3$.

x					
$f(x)$	-2	-1	0	1	2

9

O 10
- **a** Bereken $2^{{}^{2}\log(8)}$, $3^{{}^{3}\log(9)}$ en $2^{{}^{2}\log\left(\frac{1}{2}\right)}$.
- **b** De GR heeft een toets LOG (TI) of log (Casio). Bereken met deze toets log(100) en log(1000). Welk grondtal hoort bij deze toets?

Geschiedenis John Napier

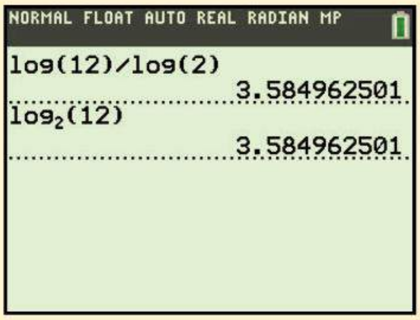
De Schotse landheer John Napier (1550–1617) heeft het begrip logaritme ingevoerd. Bij het zoeken naar een methode om het vermenigvuldigen van getallen te vereenvoudigen, kwam hij op het idee om met exponenten te werken, waardoor bijvoorbeeld de vermenigvuldiging 32×256 is om te zetten in de optelling van de exponenten 5 en 8, immers $32 \times 256 = 2^5 \times 2^8 = 2^{5+8} = 2^{13}$. Om deze rekenmethode zinvol te kunnen toepassen, heeft Napier lange tabellen gemaakt van getallen met de bijbehorende exponenten van machten met het grondtal 2, ook voor minder mooie getallen. Na jaren rekenwerk publiceerde hij in 1614 deze exponenten die hij logaritmen noemde.

Theorie D Overgaan op grondtal 10

In opgave 10a heb je enkele voorbeelden gezien van de regel $g^{{}^g\log(x)} = x$. Deze regel volgt direct uit ${}^g\log(x) = y$ geeft $g^y = x$, immers substitutie van $y = {}^g\log(x)$ in $g^y = x$ geeft $g^{{}^g\log(x)} = x$.

In opgave 10b heb je gezien dat met $\log(100)$ wordt bedoeld ${}^{10}\log(100)$.
Het is gebruikelijk om bij ${}^{10}\log$ het grondtal 10 niet te noteren.
Dus $\log(10\,000) = \log(10^4) = 4$ en $\log(0{,}01) = \log(10^{-2}) = -2$.

Met de toets LOG (TI) of log (Casio) zijn benaderingen te krijgen van logaritmen met een ander grondtal dan 10. Je gebruikt dan de formule ${}^g\log(a) = \dfrac{\log(a)}{\log(g)}$.



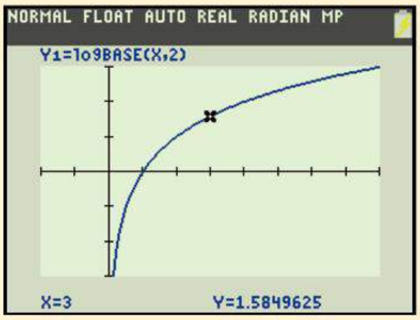
Zo is ${}^2\log(12) = \dfrac{\log(12)}{\log(2)} \approx 3{,}585$.

De formule ${}^g\log(a) = \dfrac{\log(a)}{\log(g)}$ is als volgt te bewijzen.

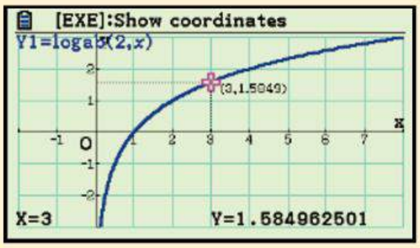
Uit $g^{{}^g\log(x)} = x$ met $g = 10$ en $x = g$ volgt $10^{\log(g)} = g$.
Linker- en rechterlid tot de macht ${}^g\log(a)$ verheffen geeft

$$\left(10^{\log(g)}\right)^{{}^g\log(a)} = g^{{}^g\log(a)}$$
$$10^{\log(g)\cdot{}^g\log(a)} = a$$
$$10^{\log(g)\cdot{}^g\log(a)} = 10^{\log(a)}$$
$$\log(g)\cdot{}^g\log(a) = \log(a)$$
$${}^g\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$$

$g^{{}^g\log(x)} = x$ **${}^g\log(g^a) = a$** **${}^g\log(a) = \dfrac{\log(a)}{\log(g)}$**



In het OPTN-CALC-menu van de Casio staat een optie om logaritmen met een grondtal ongelijk aan 10 in te voeren. Dat is de optie logab.
Bij de TI is dit de optie logBASE die in het MATH-MATH-menu staat.
Sommige oudere versies van de TI hebben deze optie niet.
Gebruik dan de regel ${}^g\log(a) = \dfrac{\log(a)}{\log(g)}$. Zo kun je de grafiek van $f(x) = {}^2\log(x)$ plotten door in te voeren $y_1 = \log(x)/\log(2)$.



11 Bereken in twee decimalen nauwkeurig.

a ${}^3\log(5)$
b ${}^{\frac{1}{7}}\log(18)$
c ${}^2\log(20) - {}^2\log(6)$
d ${}^{\frac{1}{3}}\log(10) + \log\left(\frac{1}{3}\right)$
e $3\cdot{}^2\log(7)$
f $\dfrac{5}{{}^4\log(12)}$

O 12 Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^2\log(x)$, $g(x) = {}^2\log(x - 2)$, $h(x) = {}^2\log(2x + 3)$ en $k(x) = {}^2\log(1 - x)$.

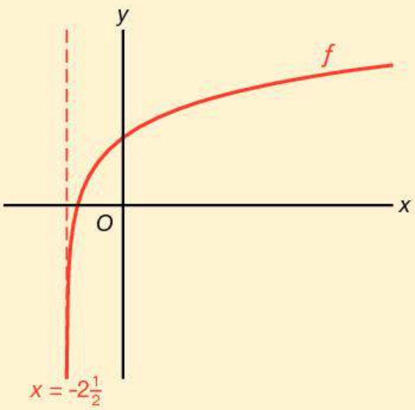
a Bestaan de functiewaarden van f, g, h en k voor $x = 2$?

b Verklaar waarom bij sommige van deze functies voor $x = 2$ geen functiewaarde bestaat.

Theorie E De grafiek van $y = {}^g\log(ax + b)$

Om het domein te berekenen van de functie $f(x) = {}^3\log(2x + 5)$ los je de ongelijkheid $2x + 5 > 0$ op.

Je krijgt $x > -2\frac{1}{2}$, dus $D_f = \langle -2\frac{1}{2}, \rightarrow \rangle$.
Uit het domein volgt dat de verticale asymptoot van de grafiek van f de lijn $x = -2\frac{1}{2}$ is.



Het domein van de functie $f(x) = {}^g\log(ax + b)$ volgt uit $ax + b > 0$.
De verticale asymptoot van de grafiek van $f(x) = {}^g\log(ax + b)$ volgt uit $ax + b = 0$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 1 + {}^{\frac{1}{2}}\log(7 - 2x)$.
Los algebraïsch op $f(x) \geq 0$.

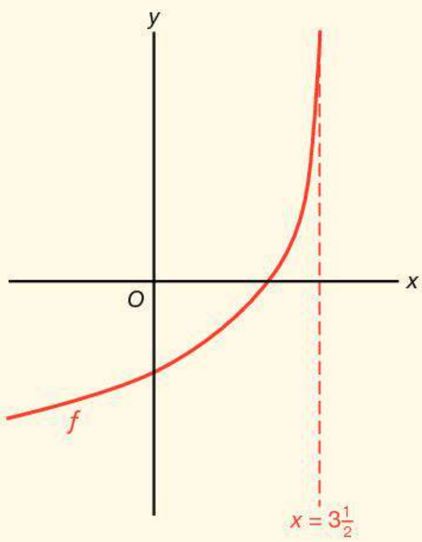
Uitwerking

$f(x) = 0$ geeft $1 + {}^{\frac{1}{2}}\log(7 - 2x) = 0$

$${}^{\frac{1}{2}}\log(7 - 2x) = -1$$
$$7 - 2x = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-1}$$
$$7 - 2x = 2$$
$$-2x = -5$$
$$x = 2\tfrac{1}{2}$$

$7 - 2x > 0$ geeft $-2x > -7$, dus $x < 3\frac{1}{2}$ en $D_f = \langle \leftarrow, 3\frac{1}{2} \rangle$.
De verticale asymptoot is de lijn $x = 3\frac{1}{2}$.
$f(x) \geq 0$ geeft $2\frac{1}{2} \leq x < 3\frac{1}{2}$

Houd rekening met het domein van f.



Afspraak
Bij het tekenen of schetsen van de grafiek van een logaritmische functie bereken je eerst het domein.
Je tekent de verticale asymptoot als stippellijn in de figuur en zet de formule erbij.

13 Gegeven is de functie $f(x) = -3 + {}^2\log(5x - 8)$.
- **a** Teken de grafiek van f.
- **b** Los algebraïsch op $f(x) \leq 0$.
- **c** Welke waarden neemt $f(x)$ aan voor $x \leq 8$?

14 Gegeven zijn de functies $f(x) = -1 + {}^3\log(x + 2)$ en $g(x) = {}^2\log(x - 4)$.
- **a** Hoe ontstaan de grafieken van f en g uit standaardgrafieken?
- **b** Schets de grafieken van f en g in één figuur.
- **c** Bereken in twee decimalen nauwkeurig de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van f en g.
- **d** Los op $f(x) \geq g(x)$. Rond in het antwoord zo nodig af op twee decimalen.

A 15 Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log(x + 3)$ en $g(x) = {}^3\log(-x + 5)$.
- **a** Los algebraïsch op $f(x) = 5$.
- **b** Welke waarden neemt $g(x)$ aan voor $x \geq -4$?
- **c** Los algebraïsch op $f(x) \geq 1$.
- **d** Los op $f(x) \leq g(x)$. Rond in het antwoord af op twee decimalen.
- **e** De lijn $y = 2{,}5$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B.
  Bereken de lengte van het lijnstuk AB in twee decimalen nauwkeurig.

O 16 Licht toe dat uit $3^x = 50$ volgt $x = {}^3\log(50)$.

Informatief Definities van logaritme

Je weet dat ${}^g\log(x) = y$ betekent $x = g^y$. Hieruit volgt ${}^g\log(g^y) = y$ en ook $g^{{}^g\log(x)} = x$.
In deze opzet is ${}^g\log(x) = y$ betekent $x = g^y$ als definitie gekozen.
Omdat de andere twee formules hieraan gelijkwaardig zijn, is het ook mogelijk om elk van deze twee als definitie te nemen.
Vervolgopleidingen nemen meestal $g^{{}^g\log(x)} = x$ als definitie van logaritme.

Theorie F De vergelijking $a^x = c$

Je weet dat uit ${}^g\log(x) = y$ volgt $x = g^y$.
Zo volgt uit ${}^2\log(30) = x$ dat $2^x = 30$.
Omgekeerd volgt uit $2^x = 30$ dat $x = {}^2\log(30)$.
Daarmee is de exacte oplossing gevonden van de vergelijking $2^x = 30$.

De exacte oplossing van de vergelijking $a^x = c$ is $x = {}^a\log(c)$.

Voorbeeld

Bereken de exacte oplossing.

a $3^{x+1} = 80$
b $5 + 2^{3x} = 25$

Uitwerking

a $3^{x+1} = 80$
$x + 1 = {}^3\log(80)$
$x = -1 + {}^3\log(80)$

b $5 + 2^{3x} = 25$
$2^{3x} = 20$
$3x = {}^2\log(20)$
$x = \frac{1}{3} \cdot {}^2\log(20)$

17 Bereken de exacte oplossing.

a $2^{x-1} = 15$
b $1 + 2^x = 15$
c $4 + 3^{x+1} = 25$
d $14 - 2^{x+3} = 2$
e $7 + 4^{2x} = 12$
f $3 \cdot 5^{2x+1} = 60$

D 18 De oplossing van de vergelijking $7 + p \cdot 3^{x-1} = 57$ is $x = {}^3\log(10)$.
Bereken p algebraïsch.

O 19 De formule $y = 3^{x-1}$ is te herleiden tot $x = 1 + {}^3\log(y)$.
Toon dit aan.

9

Theorie G Variabelen vrijmaken bij exponentiële formules

De formule $y = 10 \cdot 2^{x-3}$ is te schrijven in de vorm $x = a + {}^{g}\log(by)$.
Dit gaat als volgt.

$y = 10 \cdot 2^{x-3}$ — Verwissel beide leden.
$10 \cdot 2^{x-3} = y$ — Deel door 10.
$2^{x-3} = 0{,}1y$ — Gebruik de regel $a^x = c$ geeft $x = {}^{a}\log(c)$.
$x - 3 = {}^{2}\log(0{,}1y)$
$x = 3 + {}^{2}\log(0{,}1y)$

Hiermee is x vrijgemaakt bij de formule $y = 10 \cdot 2^{x-3}$.

Voorbeeld

Maak x vrij bij de formule $y = 40 + 10^{0{,}5x+1{,}8}$.

Uitwerking

$y = 40 + 10^{0{,}5x+1{,}8}$
$40 + 10^{0{,}5x+1{,}8} = y$
$10^{0{,}5x+1{,}8} = y - 40$
$0{,}5x + 1{,}8 = \log(y - 40)$
$0{,}5x = -1{,}8 + \log(y - 40)$
$x = -3{,}6 + 2 \cdot \log(y - 40)$

20 Maak x vrij.

a $y = 2^{x-4}$
b $y = 8 \cdot 3^{x-2}$
c $y = 4^{5x-1}$
d $y = 10 \cdot 5^{2x-3}$
e $y = 5 \cdot 10^{2x-3}$
f $y = 100 + 2^{0{,}25x-1}$
g $y = 500 - 10^{0{,}1x+1{,}5}$
h $y = 20 + 5 \cdot 10^{0{,}2x-0{,}6}$

9

A 21 **a** Herleid de formule $N = 50 \cdot 2^{4t-1}$ tot de vorm $t = a + b \cdot {}^{4}\log(cN)$.
b Maak F vrij bij de formule $K = 60 + 40 \cdot 10^{2F-0{,}8}$.
c Gegeven is de formule $A = 500 - 50 \cdot 1{,}75^{B-2{,}5}$.
Schrijf B als functie van A.

Terugblik

De logaritme

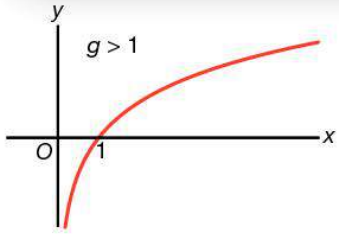
${}^{g}\log(x)$ is de exponent van het grondtal g waarmee de macht gelijk is aan x.
Zo is ${}^{3}\log(81) = 4$, want $3^4 = 81$ en
${}^{3}\log\left(\frac{1}{9}\sqrt{3}\right) = {}^{3}\log\left(3^{-2} \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right) = {}^{3}\log\left(3^{-1\frac{1}{2}}\right) = -1\frac{1}{2}$.
Je maakt gebruik van de regel ${}^{g}\log(g^a) = a$.

${}^{g}\log(x) = a$ betekent $x = g^a$
$\log(x) = {}^{10}\log(x)$

Een vergelijking als $-1 + {}^{4}\log(5x - 6) = 1$ moet je algebraïsch kunnen oplossen. Hiernaast zie je hoe dat gaat.

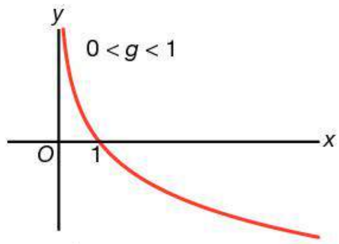
$-1 + {}^{4}\log(5x - 6) = 1$
${}^{4}\log(5x - 6) = 2$
$5x - 6 = 4^2$
$5x = 22$
$x = 4\frac{2}{5}$

De inverse functie van $f(x) = g^x$ is de logaritmische functie $f^{\text{inv}}(x) = {}^{g}\log(x)$. Het domein van f^{inv} is $\langle 0, \rightarrow\rangle$ en het bereik is $\mathbb{R}$. De grafiek van $y = {}^{g}\log(x)$ is een standaardgrafiek.
De y-as is de verticale asymptoot.
De grafiek is stijgend voor $g > 1$ en dalend voor $0 < g < 1$.



$y = {}^{g}\log(x)$

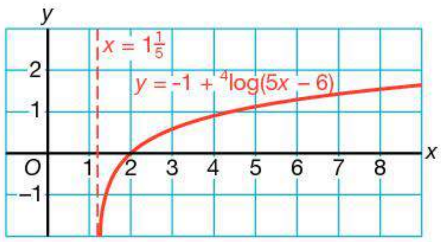
De log-toets op de GR betekent ${}^{10}\log$.
Met de regels $g^{{}^{g}\log(x)} = x$ en ${}^{g}\log(g^a) = a$ is de formule
${}^{g}\log(a) = \dfrac{\log(a)}{\log(g)}$ afgeleid.



$y = {}^{g}\log(x)$

De functie $f(x) = {}^{g}\log(ax + b)$

Het domein van de functie $f(x) = {}^{g}\log(ax + b)$ krijg je door de ongelijkheid $ax + b > 0$ op te lossen.
Bij $f(x) = -1 + {}^{4}\log(5x - 6)$ krijg je $5x - 6 > 0$ en dit geeft $x > 1\frac{1}{5}$.
Dus $D_f = \langle 1\frac{1}{5}, \rightarrow\rangle$ en de verticale asymptoot van de grafiek is de lijn $x = 1\frac{1}{5}$. De grafiek van f staat hiernaast.
Bij het oplossen van de ongelijkheid $f(x) \leq 1$ moet je rekening houden met het domein.
Je krijgt $1\frac{1}{5} < x \leq 4\frac{2}{5}$.



De vergelijking $a^x = c$

De exacte oplossing van de vergelijking $a^x = c$ is $x = {}^{a}\log(c)$.
Bij $3^{2x-1} = 5$ krijg je $2x - 1 = {}^{3}\log(5)$ en hieruit volgt $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot {}^{3}\log(5)$.

Variabelen vrijmaken bij exponentiële formules

Het vrijmaken van x bij de formule $y = 40 + 5 \cdot 2^{x-1}$ gaat als volgt.
$y = 40 + 5 \cdot 2^{x-1}$
$40 + 5 \cdot 2^{x-1} = y$
$5 \cdot 2^{x-1} = y - 40$
$2^{x-1} = 0{,}2y - 8$
$x - 1 = {}^{2}\log(0{,}2y - 8)$
$x = 1 + {}^{2}\log(0{,}2y - 8)$

9.2 Rekenregels en vergelijkingen

O 22 **a** Gegeven zijn de formules $y_1 = \log(x+5)$, $y_2 = \log(x) + \log(5)$ en $y_3 = \log(5x)$. Twee van deze formules komen op hetzelfde neer. Onderzoek met de GR welke formules dat zijn.
b Welke van de formules $y_1 = \log(x-5)$, $y_2 = \log(x) - \log(5)$ en $y_3 = \log\left(\frac{x}{5}\right)$ komen op hetzelfde neer?
c Welke van de formules $y_1 = \log(x^3)$, $y_2 = (\log(x))^3$ en $y_3 = 3 \cdot \log(x)$ komen op hetzelfde neer?

Theorie A Rekenregels voor logaritmen

De formule $g^{{}^g\log(x)} = x$ gebruiken we om de **rekenregels voor logaritmen** aan te tonen. Van deze rekenregels heb je in opgave 22 voorbeelden gezien.

Voor $g > 0$, $g \neq 1$, $a > 0$ en $b > 0$ geldt
$${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab)$$
$${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$$
$$n \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^n)$$

De regel ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab)$ toon je aan met behulp van de rekenregels voor machten en $g^{{}^g\log(x)} = x$. Dit gaat als volgt.
$g^{{}^g\log(a) + {}^g\log(b)} = g^{{}^g\log(a)} \cdot g^{{}^g\log(b)} = a \cdot b = g^{{}^g\log(ab)}$, dus
${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab)$.
De andere rekenregels toon je zelf aan in opgave 26.

Om een getal als logaritme te schrijven, gebruik je $a = {}^g\log(g^a)$.
Zo is 5 bijvoorbeeld te schrijven als ${}^2\log(2^5)$.
In het voorbeeld zie je hoe je de rekenregels gebruikt om vormen te herleiden tot één logaritme.

$a = {}^g\log(g^a)$

Voorbeeld

Herleid tot één logaritme.
a $1 + 2 \cdot {}^3\log(5)$
b $5 - 3 \cdot {}^2\log(3)$

Uitwerking
a $1 + 2 \cdot {}^3\log(5) = {}^3\log(3) + {}^3\log(5^2) = {}^3\log(3) + {}^3\log(25) = {}^3\log(3 \cdot 25) = {}^3\log(75)$
b $5 - 3 \cdot {}^2\log(3) = {}^2\log(2^5) - {}^2\log(3^3) = {}^2\log(32) - {}^2\log(27) = {}^2\log\left(\frac{32}{27}\right)$

9

23 Herleid tot één logaritme.

a ${}^{2}\log(6) + {}^{2}\log(10)$

b ${}^{3}\log(30) - {}^{3}\log(6)$

c $2 \cdot {}^{5}\log(3) + {}^{5}\log\left(\frac{1}{2}\right)$

d ${}^{\frac{1}{2}}\log(15) - 4 \cdot {}^{\frac{1}{2}}\log(3)$

e $-2 \cdot {}^{4}\log(6) + {}^{4}\log(12)$

f $\log(50) - 2 \cdot \log(5)$

24 Herleid tot één logaritme.

a $4 + {}^{2}\log(3)$

b $3 - {}^{\frac{1}{2}}\log(10)$

c $2 - \log(5)$

d ${}^{2}\log(12) - {}^{3}\log(9)$

e $\frac{1}{2} \cdot {}^{3}\log(16) + {}^{\frac{1}{2}}\log(8)$

f $\log(500) - {}^{5}\log(125)$

25 Bereken exact.

a ${}^{3}\log(6) + {}^{3}\log\left(1\frac{1}{2}\right)$

b ${}^{5}\log(2) - {}^{5}\log(50)$

c ${}^{2}\log(27) + 3 \cdot {}^{2}\log\left(\frac{1}{6}\right)$

d $2 \cdot {}^{4}\log(6) - 2 \cdot {}^{4}\log(3)$

26 Vul in.

a $g^{{}^{g}\log(a) - {}^{g}\log(b)} = \frac{g^{\cdots}}{g^{\cdots}} = \frac{\cdots}{\cdots} = g^{\cdots}$, dus ${}^{g}\log(a) - {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log\left(\frac{a}{b}\right)$

b $g^{n \cdot {}^{g}\log(a)} = (g^{\cdots})^{\cdots} = \ldots = g^{\cdots}$, dus $n \cdot {}^{g}\log(a) = {}^{g}\log(a^{n})$

O 27 Gegeven is de vergelijking ${}^{2}\log(x + 1) = 3 + {}^{2}\log(3)$.

a Herleid $3 + {}^{2}\log(3)$ tot één logaritme.

b Los de vergelijking ${}^{2}\log(x + 1) = 3 + {}^{2}\log(3)$ algebraïsch op.

Theorie B Vergelijkingen van de vorm ${}^{g}\log(A) = {}^{g}\log(B)$

In opgave 27 heb je de vergelijking ${}^{2}\log(x + 1) = 3 + {}^{2}\log(3)$ herleid tot ${}^{2}\log(x + 1) = {}^{2}\log(24)$.
Uit de regel ${}^{g}\log(A) = {}^{g}\log(B)$ geeft $A = B$ volgt $x + 1 = 24$.

> ${}^{g}\log(A) = {}^{g}\log(B)$
> geeft $A = B$

Om toe te werken naar de vorm ${}^{g}\log(A) = {}^{g}\log(B)$ gebruik je de rekenregels voor logaritmen.

Bij de vergelijking ${}^{2}\log(x + 1) + {}^{2}\log(x - 1) = {}^{2}\log(2x + 7)$ krijg je
${}^{2}\log((x + 1)(x - 1)) = {}^{2}\log(2x + 7)$
${}^{2}\log(x^2 - 1) = {}^{2}\log(2x + 7)$
$x^2 - 1 = 2x + 7$
$x^2 - 2x - 8 = 0$
$(x + 2)(x - 4) = 0$
$x = -2 \vee x = 4$
Invullen van $x = -2$ in de gegeven vergelijking geeft
${}^{2}\log(-1) + {}^{2}\log(-3) = {}^{2}\log(3)$.
Omdat ${}^{2}\log(-1)$ en ${}^{2}\log(-3)$ niet gedefinieerd zijn, is $x = -2$ geen oplossing.
Invullen van $x = 4$ geeft ${}^{2}\log(5) + {}^{2}\log(3) = {}^{2}\log(15)$ en dit klopt.
Dus $x = 4$ voldoet.

9

Door de rekenregels voor logaritmen te gebruiken is een oplossing ingevoerd. Daarom controleer je altijd bij het oplossen van logaritmische vergelijkingen of de gevonden waarden van x voldoen. Het is daarvoor voldoende om na te gaan of de logaritmen voor de gevonden waarden gedefinieerd zijn.

Voorbeeld

Los algebraïsch op.

a ${}^{3}\log(x-2) = 1 + 4 \cdot {}^{3}\log(2)$

b $1 + 2 \cdot {}^{2}\log(x) = {}^{2}\log(5x+3)$

Uitwerking

a ${}^{3}\log(x-2) = 1 + 4 \cdot {}^{3}\log(2)$

${}^{3}\log(x-2) = {}^{3}\log(3) + {}^{3}\log(2^4)$

${}^{3}\log(x-2) = {}^{3}\log(3) + {}^{3}\log(16)$

${}^{3}\log(x-2) = {}^{3}\log(3 \cdot 16)$

${}^{3}\log(x-2) = {}^{3}\log(48)$

$x - 2 = 48$

$x = 50$

vold.

b $1 + 2 \cdot {}^{2}\log(x) = {}^{2}\log(5x+3)$

${}^{2}\log(2) + {}^{2}\log(x^2) = {}^{2}\log(5x+3)$

${}^{2}\log(2x^2) = {}^{2}\log(5x+3)$

$2x^2 = 5x + 3$

$2x^2 - 5x - 3 = 0$

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -3 = 49$

$x = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{5+7}{4} = 3$

vold. niet vold.

28 Los algebraïsch op.

a ${}^{5}\log(x) = 3 \cdot {}^{5}\log(2) - 2 \cdot {}^{5}\log(3)$

b ${}^{2}\log(x) = 4 - {}^{2}\log(3)$

c ${}^{2}\log(x+3) = 3 + {}^{2}\log(x)$

d ${}^{3}\log(2x) = 1 + {}^{3}\log(x+1)$

29 Los algebraïsch op.

a $5 \cdot \log(x) = 5 - \log(3125)$

b ${}^{\frac{1}{2}}\log(2x-1) = 2 + {}^{\frac{1}{2}}\log(x+2)$

c ${}^{3}\log(x+2) = 1 - {}^{3}\log(x)$

d $2 \cdot {}^{3}\log(x) + 1 = {}^{3}\log(5x-2)$

A 30 Bereken exact de oplossingen.

a ${}^{5}\log(x) = 2 + \frac{1}{2} \cdot {}^{5}\log(3)$

b ${}^{3}\log(x+4) + 1 = 2 \cdot {}^{3}\log(x-2)$

c ${}^{2}\log(2x) - {}^{2}\log(x+3) = {}^{2}\log(x) - 2$

d ${}^{3}\log(x) = 2 - {}^{3}\log(x-1)$

O 31 Je weet ${}^{2}\log(5) = \frac{\log(5)}{\log(2)}$.

Deel teller en noemer in $\frac{\log(5)}{\log(2)}$ door $\log(3)$ en toon hiermee aan dat ${}^{2}\log(5) = \frac{{}^{3}\log(5)}{{}^{3}\log(2)}$.

9

Theorie C Overgaan op ander grondtal

Met de regel ${}^{g}\log(a) = \dfrac{\log(a)}{\log(g)}$ ga je over van grondtal g op grondtal 10. Dit is een speciaal geval van de regel ${}^{g}\log(a) = \dfrac{{}^{p}\log(a)}{{}^{p}\log(g)}$ waarbij je overgaat op grondtal p.
Deze algemene regel toon je als volgt aan.

$$ {}^{g}\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)} = \frac{\dfrac{\log(a)}{\log(p)}}{\dfrac{\log(g)}{\log(p)}} = \frac{{}^{p}\log(a)}{{}^{p}\log(g)} $$

Deel teller en noemer door log(p).

Ga je bij ${}^{\frac{1}{3}}\log(x)$ over op grondtal 3, dan krijg je

$$ {}^{\frac{1}{3}}\log(x) = \frac{{}^{3}\log(x)}{{}^{3}\log\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{{}^{3}\log(x)}{{}^{3}\log(3^{-1})} = \frac{{}^{3}\log(x)}{-1} = -{}^{3}\log(x). $$

Algemeen is ${}^{\frac{1}{g}}\log(x) = \dfrac{{}^{g}\log(x)}{{}^{g}\log\left(\frac{1}{g}\right)} = \dfrac{{}^{g}\log(x)}{{}^{g}\log(g^{-1})} = \dfrac{{}^{g}\log(x)}{-1} = -{}^{g}\log(x)$.

$$ \mathbf{{}^{g}\log(a) = \frac{{}^{p}\log(a)}{{}^{p}\log(g)}} \qquad \mathbf{{}^{g}\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}} \qquad \mathbf{{}^{\frac{1}{g}}\log(a) = -{}^{g}\log(a)} $$

Je kunt nu ook de vergelijking ${}^{3}\log(x+1) = {}^{3}\log(5) - {}^{\frac{1}{3}}\log(x)$ algebraïsch oplossen. Dat gaat als volgt.

${}^{3}\log(x+1) = {}^{3}\log(5) - {}^{\frac{1}{3}}\log(x)$
${}^{3}\log(x+1) = {}^{3}\log(5) + {}^{3}\log(x)$
${}^{3}\log(x+1) = {}^{3}\log(5x)$
$x + 1 = 5x$
$-4x = -1$
$x = \frac{1}{4}$
vold.

Bij het algebraïsch oplossen van de vergelijking ${}^{4}\log(x) = {}^{2}\log(x-2)$ ga je bij ${}^{4}\log(x)$ over op grondtal 2. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

Los algebraïsch op.

a $2 \cdot {}^{2}\log(x) + {}^{\frac{1}{2}}\log(x+6) = 0$

b ${}^{4}\log(x) = {}^{2}\log(x-2)$

Uitwerking

a $2 \cdot {}^{2}\log(x) + {}^{\frac{1}{2}}\log(x+6) = 0$

${}^{2}\log(x^2) - {}^{2}\log(x+6) = 0$

${}^{2}\log(x^2) = {}^{2}\log(x+6)$

$x^2 = x + 6$

$x^2 - x - 6 = 0$

$(x+2)(x-3) = 0$

$x = -2 \quad \vee \quad x = 3$

vold. niet   vold.

b ${}^{4}\log(x) = {}^{2}\log(x-2)$

$\dfrac{{}^{2}\log(x)}{{}^{2}\log(4)} = {}^{2}\log(x-2)$

$\dfrac{{}^{2}\log(x)}{2} = {}^{2}\log(x-2)$

${}^{2}\log(x) = 2 \cdot {}^{2}\log(x-2)$

${}^{2}\log(x) = {}^{2}\log((x-2)^2)$

$x = (x-2)^2$

$x = x^2 - 4x + 4$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$(x-1)(x-4) = 0$

$x = 1 \quad \vee \quad x = 4$

vold. niet   vold.

32 Los algebraïsch op.

a ${}^{3}\log(3x-5) + {}^{\frac{1}{3}}\log(x-1) = 0$

b ${}^{5}\log(3x) + 2 \cdot {}^{\frac{1}{5}}\log(x) = 0$

c $2x \cdot {}^{\frac{1}{3}}\log(3x+5) = {}^{\frac{1}{3}}\log(3x+5)$

d ${}^{2}\log(x) = {}^{4}\log(x+20)$

A 33 Los algebraïsch op.

a $-2 \cdot {}^{\frac{1}{2}}\log(x) = 2 + {}^{2}\log(3-x)$

b ${}^{9}\log(2x) = {}^{3}\log(x-4)$

c $4x \cdot {}^{4}\log(2x-1) + 3 \cdot {}^{4}\log(2x-1) = 0$

d $x^2 \cdot {}^{5}\log(2x+1) + 9 \cdot {}^{\frac{1}{5}}\log(2x+1) = 0$

O 34 Gegeven is de vergelijking $({}^{2}\log(x))^2 - 2 \cdot {}^{2}\log(x) - 8 = 0$.

a Stel ${}^{2}\log(x) = u$ en bereken u.

b Bereken de oplossingen van de vergelijking $({}^{2}\log(x))^2 - 2 \cdot {}^{2}\log(x) - 8 = 0$.

O 35 Gegeven is de vergelijking $(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x = 8$.

a Stel $2^x = u$ en bereken u.

b Bereken de oplossing van de vergelijking $(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x = 8$.

9

Theorie D Vergelijkingen oplossen met substitutie

In voorbeeld a wordt de vergelijking ${}^3\log^2(x) - {}^3\log(x) = 0$ opgelost met de substitutie ${}^3\log(x) = u$. Met de notatie ${}^3\log^2(x)$ wordt $({}^3\log(x))^2$ bedoeld.

Voorbeeld

a Los de vergelijking ${}^3\log^2(x) - {}^3\log(x) = 0$ algebraïsch op.
b Los de vergelijking $4^x = 2^x + 42$ algebraïsch op. Rond het antwoord af op twee decimalen.

Uitwerking

a ${}^3\log^2(x) - {}^3\log(x) = 0$
Stel ${}^3\log(x) = u$.
$u^2 - u = 0$
$u(u - 1) = 0$
$u = 0 \vee u = 1$
${}^3\log(x) = 0 \vee {}^3\log(x) = 1$
$x = 1 \vee x = 3$
vold. vold.

b $4^x = 2^x + 42$
$(2^2)^x = 2^x + 42$
$(2^x)^2 = 2^x + 42$
Stel $2^x = u$.
$u^2 = u + 42$
$u^2 - u - 42 = 0$
$(u + 6)(u - 7) = 0$
$u = -6 \vee u = 7$
$2^x = -6 \vee 2^x = 7$
geen opl. $x = {}^2\log(7) \approx 2{,}81$

36 Los algebraïsch op.
a ${}^2\log^2(x) = 2 \cdot {}^2\log(x) + 3$
b ${}^{\frac{1}{2}}\log^2(x + 2) + 3 \cdot {}^{\frac{1}{2}}\log(x + 2) = 0$
c $2 \cdot {}^3\log^2(x) + 2 = 5 \cdot {}^3\log(x)$
d ${}^5\log^2(x) + 3 \cdot {}^{\frac{1}{5}}\log(x) + 2 = 0$

9

37 Bereken exact de oplossingen.
a $3^x - 2 = 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$
b $2^x = 6 - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$
c $9^x = 4 + 3^{x+1}$
d $2^x = 24 - 2^{2x-1}$

38 Los algebraïsch op. Rond het antwoord af op twee decimalen.
a $3^{2x-1} = 10$
b $5 \cdot 4^{x-2} = 16$
c $9^x = 2 \cdot 3^x + 6$
d $2^x + 2^{-x} = 3$

A 39 Bereken exact de oplossingen.
a $3^{x+2} + 3^x = 600$
b $3^x + 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} = 18$
c $5^{x-1} + 5^{2x-1} = 4$
d $3^x + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} = 9$

Terugblik

Rekenregels voor logaritmen

$g^{^g\log(a)} = a$

$^g\log(g^a) = a$

$^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab)$

$^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$

$n \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^n)$

$^g\log(a) = \frac{^p\log(a)}{^p\log(g)}$

$^{\frac{1}{g}}\log(a) = -{}^g\log(a)$

Logaritmische en exponentiële vergelijkingen

- $^g\log(A) = B$ geeft $A = g^B$
- $^g\log(A) = {}^g\log(B)$ geeft $A = B$
- $g^A = B$ geeft $A = {}^g\log(B)$
- $g^A = g^B$ geeft $A = B$

Controleer bij logaritmische vergelijkingen of voor de gevonden waarden de logaritmen van de oorspronkelijke vergelijking bestaan.

Vergelijkingen zoals $^2\log(x - 2) = 3 - {}^2\log(x)$

$^2\log(x - 2) = 3 - {}^2\log(x)$

$^2\log(x - 2) + {}^2\log(x) = 3$

$^2\log(x(x - 2)) = 3$

$x(x - 2) = 2^3$

$x^2 - 2x = 8$

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$(x + 2)(x - 4) = 0$

$x = -2 \quad \vee \quad x = 4$

vold. niet vold.

Vergelijkingen zoals $^2\log(x) = {}^4\log(x + 12)$

$^2\log(x) = {}^4\log(x + 12)$

$^2\log(x) = \frac{^2\log(x + 12)}{^2\log(4)}$

$^2\log(x) = \frac{^2\log(x + 12)}{2}$

$2 \cdot {}^2\log(x) = {}^2\log(x + 12)$

$^2\log(x^2) = {}^2\log(x + 12)$

$x^2 = x + 12$

$x^2 - x - 12 = 0$

$(x + 3)(x - 4) = 0$

$x = -3 \quad \vee \quad x = 4$

vold. niet vold.

Vergelijkingen zoals $^5\log^2(x) + {}^5\log(x) - 2 = 0$

$^5\log^2(x) + {}^5\log(x) - 2 = 0$

Stel $^5\log(x) = u$.

$u^2 + u - 2 = 0$

$(u - 1)(u + 2) = 0$

$u = 1 \vee u = -2$

$^5\log(x) = 1 \vee {}^5\log(x) = -2$

$x = 5 \vee x = \frac{1}{25}$

vold. vold.

Vergelijkingen zoals $4^x = 3 \cdot 2^x + 10$

$4^x = 3 \cdot 2^x + 10$

$(2^2)^x - 3 \cdot 2^x - 10 = 0$

$(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x - 10 = 0$

Stel $2^x = u$.

$u^2 - 3u - 10 = 0$

$(u + 2)(u - 5) = 0$

$u = -2 \vee u = 5$

$2^x = -2 \vee 2^x = 5$

geen opl. $x = {}^2\log(5)$

9

9.3 Exponentiële en logaritmische formules

O 40 Het aantal inwoners van Ghana wordt gegeven door de formule $N = 21{,}7 \cdot 1{,}026^t$. Hierin is N in miljoenen en t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2004.

a Na hoeveel jaar is het aantal inwoners verdubbeld ten opzichte van 1 januari 2004?

b Op 1 januari 2000 had Ghana 19,6 miljoen inwoners. Hoeveel jaar na 1 januari 2000 is dit aantal verdubbeld?

Theorie A Verdubbelingstijd en halveringstijd

De groei van een bevolking wordt vaak gegeven met een groeipercentage. De sterkte van de groei is hiermee niet voor iedereen goed in te schatten. Met de **verdubbelingstijd** krijg je een betere indruk van de groei.

$$b \cdot g^T = 2b \xrightarrow{:b} g^T = 2$$

Dus de verdubbelingstijd is onafhankelijk van b.

Bij een groei van 3,5% per jaar bereken je de verdubbelingstijd T door de vergelijking $1{,}035^T = 2$ op te lossen.
Uit $1{,}035^T = 2$ volgt $T = {}^{1{,}035}\log(2) \approx 20{,}1$.
Dus de verdubbelingstijd is iets meer dan 20 jaar.

De verdubbelingstijd bij exponentiële groei is de tijd waarin de hoeveelheid verdubbelt.
Bij groeifactor g bereken je de verdubbelingstijd T door de vergelijking $g^T = 2$ op te lossen.

Bij exponentiële afname is het begrip **halveringstijd** van belang.
De halveringstijd is de tijd waarin de hoeveelheid gehalveerd wordt.
Bij groeifactor g bereken je de halveringstijd T door de vergelijking $g^T = \frac{1}{2}$ op te lossen.

Voorbeeld

Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 12% af.
Bereken de halveringstijd in maanden nauwkeurig.

Uitwerking
$g_{\text{jaar}} = 0{,}88$, dus $0{,}88^T = \frac{1}{2}$ en dit geeft $T = {}^{0{,}88}\log\left(\frac{1}{2}\right) \approx 5{,}42$.
De halveringstijd is vijf jaar en vijf maanden.

0,42 jaar =
0,42 × 12 maanden ≈
5 maanden

9

41 **a** Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 13,1% toe.
Bereken de verdubbelingstijd in maanden nauwkeurig.
b Een hoeveelheid neemt wekelijks met 8,5% af.
Bereken de halveringstijd in dagen nauwkeurig.

42 **a** De bevolking van Indonesië neemt jaarlijks met 1,1% toe.
Bereken de verdubbelingstijd in jaren nauwkeurig.
b De bevolking van de VS groeit elke tien jaar met 8,3%.
Bereken de verdubbelingstijd in jaren nauwkeurig.

43 De radioactieve stof jodium-131 ontstaat bij een kernexplosie.
De hoeveelheid radioactieve stof neemt met 8,3% per dag af.
a Bereken de halveringstijd.
b Na hoeveel dagen is nog 10% van de beginhoeveelheid over?

44 **a** Een hoeveelheid verdubbelt elke tien dagen. Dus $g_{10\text{ dagen}} = 2$.
Hieruit volgt $g_{\text{dag}} = 2^{\frac{1}{10}}$.
Bereken het groeipercentage per dag.
b Een hoeveelheid verdubbelt elke 25 jaar.
Bereken het groeipercentage per jaar.
c De radioactieve stof strontium-90 heeft een halveringstijd van 28 jaar.
Bereken met hoeveel procent de hoeveelheid radioactieve stof per jaar afneemt.

A 45 Bij het zuiveren van afvalwater gebruikt men het begrip biochemisch zuurstofverbruik (BZV) als maat voor de verontreiniging van het water met organisch materiaal. In deze opgave gaan we uit van huishoudelijk afvalwater met een BZV van 300 mg/liter. Dat wil zeggen dat er 300 mg zuurstof nodig is om één liter van het afvalwater te zuiveren. Bij de zuivering van het afvalwater zal het BZV dus afnemen: hoe schoner het water, des te lager het BZV. Omdat deze zuivering door micro-organismen wordt verricht, is de afname van het BZV afhankelijk van de temperatuur. Bij lage temperaturen zijn de micro-organismen minder actief.
a Bij een temperatuur van 20 °C neemt het BZV met 19% per dag af.
Met hoeveel procent neemt het BZV per week af?
b Bij een temperatuur van 10 °C neemt het BZV met 62% per week af.
Met hoeveel procent neemt het BZV per dag af?

In een zuiveringsinstallatie vindt de zuivering plaats bij een temperatuur van 15 °C. De afname is dan 15,5% per dag.
c Stel de formule op van het BZV na t dagen zuiveren.
d Bereken in uren nauwkeurig de halveringstijd van het BZV.
e Bereken na hoeveel dagen zuiveren het BZV is afgenomen tot 10 mg/liter.

Voor de halveringstijd h in dagen van het BZV hanteert men de formule $h = 7{,}6 \cdot 0{,}96^T$. Hierin is T de temperatuur in °C.
f Controleer deze formule met een berekening voor temperaturen van 10 °C en 20 °C.

9

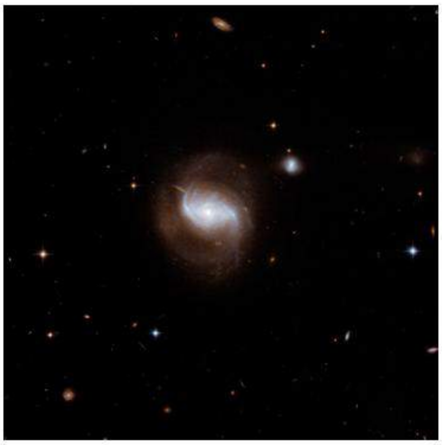
O 46 In de astronomie wordt onder de lichtkracht van een ster verstaan het totaal uitgezonden vermogen in de vorm van elektromagnetische straling.
De lichtkracht wordt vaak uitgedrukt in eenheden van de lichtkracht van de zon. Zie de tabel.

ster	lichtkracht
Wolf 359	0,00002
Ster van Barnard	0,0004
Lalande	0,0016
Epsilon Eridani	0,28
Zon	1
Sirius A	23
Spica	830
Polaris	4900
Betelgeuze	22 900
Rigel A	75 850

a Hoeveel keer zoveel lichtkracht heeft Rigel A als Sirius A? En hoeveel keer zoveel als Wolf 359?

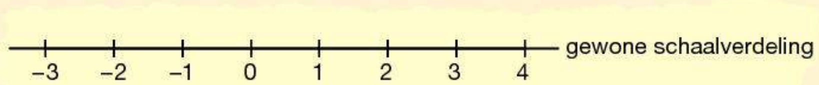
b We willen de lichtkracht van de tien sterren op een getallenlijn zetten. Stel dat we de eenheid zo kiezen, dat 1 mm overeenkomt met een lichtkracht van 0,00001.
Hoe lang moet de getallenlijn dan worden?

c Neem aan dat op de getallenlijn 1 mm overeenkomt met een lichtkracht van 1000.
Hoe lang moet de getallenlijn dan worden? Welk bezwaar is tegen deze eenheid in te brengen?

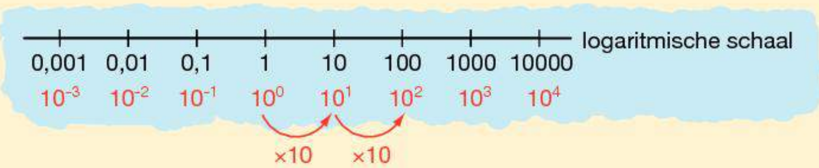


Theorie B Logaritmische schaalverdeling

Bij een gewone schaalverdeling zit er tussen de getallen 0 en 1 evenveel afstand als tussen de getallen 1 en 2, enz.



Bij een **logaritmische schaalverdeling** zit er tussen de getallen $10^0 = 1$ en $10^1 = 10$ evenveel afstand als tussen de getallen $10^1 = 10$ en $10^2 = 100$.
Bij een vaste stapgrootte hoort bij een logaritmische schaalverdeling dus een vaste factor.



$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

figuur 9.3

Op de logaritmische schaalverdeling is de afstand van 10^4 tot 10^0 gelijk aan 4 en dit is $\log(10^4)$.
De afstand van een getal tot 10^0 krijg je door de logaritme van dat getal te nemen. Daarom heet deze schaalverdeling de logaritmische schaalverdeling.

Om de lichtkracht van de sterren van opgave 46 uit te zetten op een logaritmische schaal neem je dus van elke lichtkracht de logaritme.
Bij Polaris krijg je $\log(4900) \approx 3{,}7$, dus op de logaritmische schaalverdeling staat Polaris 3,7 rechts van $10^0 = 1$.
Omdat $\log(0{,}0016) \approx -2{,}8$ staat Lalande 2,8 links van 1.

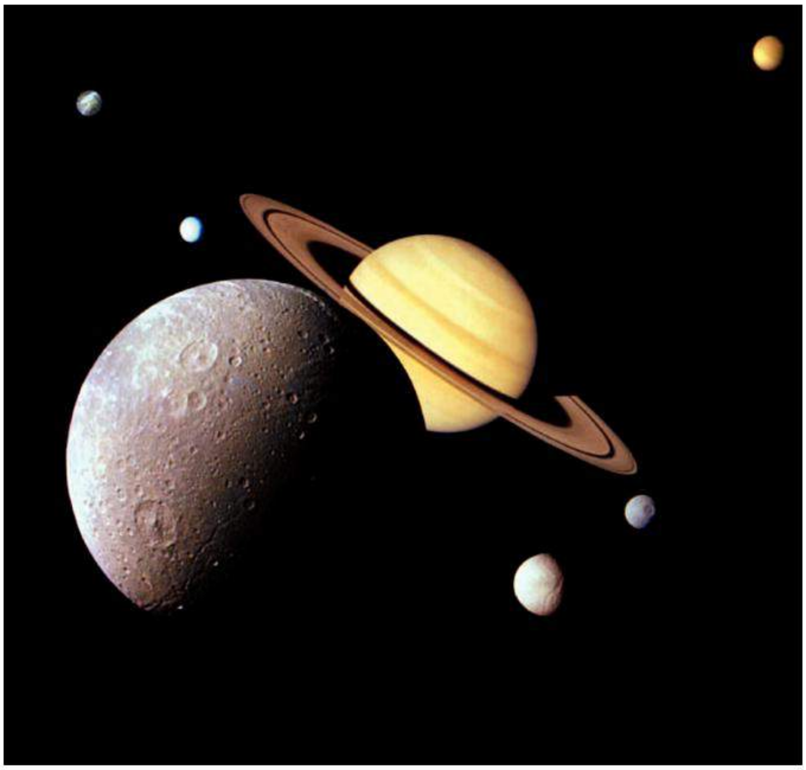
47 Zie de tabel met de lichtkracht van sterren in opgave 46.

a Zet de lichtkrachten uit op een getallenlijn met logaritmische schaalverdeling.

b De ster Proxima Centauri staat op de getallenlijn van vraag a 4,3 links van 1 en Bellatrix staat 3,8 rechts van 1.
Bereken de lichtkracht van deze sterren.

A 48 Zet de omlooptijden om de zon van de planeten en de dwergplaneet Pluto op een logaritmische schaalverdeling.

planeet	omlooptijd
Mercurius	88 dagen
Venus	225 dagen
Aarde	365 dagen
Mars	687 dagen
Jupiter	11,86 jaar
Saturnus	29,46 jaar
Uranus	84,08 jaar
Neptunus	164,8 jaar
Pluto	248,4 jaar



Theorie C Logaritmisch papier

In figuur 9.4 zie je een gedeelte van een vel **logaritmisch papier**. Op de y-as is de logaritmische schaalverdeling gebruikt. Op deze as staat het getal 1 bij het snijpunt met de x-as. Op de x-as is een gewone schaalverdeling gekozen.

Met behulp van de getallen langs de y-as kun je bij elke horizontale lijn te weten komen welke y-waarde erbij hoort.

Van onder naar boven zie je eerst de getallen 1, 2, 3, ..., 9 en $10^1 = 10$.

De lijn direct boven de lijn $y = 10$ hoort bij $y = 11$, dan $y = 12$, ... tot en met $y = 20$.
Bij de lijn $y = 20$ staat 2, want $2 \cdot 10^1 = 20$.

Verder naar boven krijg je vervolgens lijnen bij de waarden 21, 22, 23, ..., 29 en 30.

Tussen 30 en 40 staan alleen nog maar lijnen bij 32, 34, 36 en 38.

Tussen 50 en 60 staat alleen nog maar een lijn bij 55.

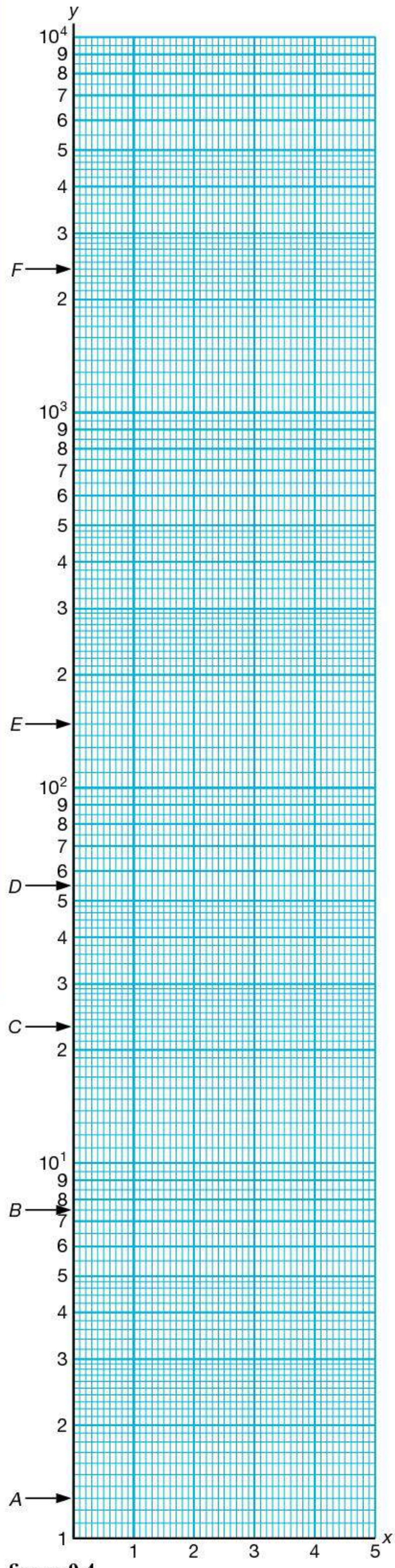
De cijfers 2, 3, 4, ..., 9 tussen $10^2 = 100$ en $10^3 = 1000$ horen bij de waarden 200, 300, 400, ..., 900, want $200 = 2 \cdot 10^2$, $300 = 3 \cdot 10^2$, enzovoort.

49 Zie figuur 9.4.

a Welke y-waarden horen bij de letters A tot en met F?

b Je ziet in de figuur wel een lijn bij 13, maar niet bij 33.
Bij welke van de volgende getallen is een lijn getekend?
550   310   210   49   9,5   2,4   1,25   0

c Bij een onderzoek variëren de meetresultaten van 10^3 tot 10^7. Om deze gegevens op het logaritmisch papier van figuur 9.4 te kunnen uitzetten, zet men op de verticale as 10^3 op de hoogte van de horizontale as en 10^7 bij de bovenste horizontale lijn.
Welke getallen horen in dit geval bij de letters A tot en met F?



figuur 9.4

O 50 [▶ WERKBLAD]

a Vul de tabel in.

x	0	2	4	6	8
$y = 3^x$					

b Teken de punten die uit de tabel volgen op het logaritmisch papier. Teken door de punten de grafiek van $y = 3^x$. Wat valt je op?

c Teken in dezelfde figuur de grafieken van $y = 4 \cdot 3^x$, $y = 3 \cdot 4^x$ en $y = 5000 \cdot 0{,}6^x$.

Uit $y = 4 \cdot 3^x$ volgt $\log(y) = \log(3) \cdot x + \log(4)$.

d Licht dit toe.

e Hoe volgt uit $\log(y) = \log(3) \cdot x + \log(4)$ dat de grafiek van $y = 4 \cdot 3^x$ op logaritmisch papier een rechte lijn is?

Theorie D Exponentiële groei en logaritmisch papier

De grafiek van $y = b \cdot g^x$ is op logaritmisch papier een rechte lijn.
Je kunt dit als volgt inzien.
Uit $y = b \cdot g^x$ volgt

$\log(y) = \log(b \cdot g^x)$
$\log(y) = \log(b) + \log(g^x)$
$\log(y) = \log(b) + x \cdot \log(g)$
$\log(y) = \log(g) \cdot x + \log(b)$.

Noem je $\log(g) = G$ en $\log(b) = B$, dan krijg je $\log(y) = G \cdot x + B$.
De grafiek van $\log(y) = G \cdot x + B$ is een rechte lijn in een assenstelsel met een logaritmische schaal op de verticale as.

Omgekeerd hoort bij een rechte lijn op logaritmisch papier een formule van de vorm $y = b \cdot g^x$.
Zet je gegevens uit op logaritmisch papier en liggen de punten (vrijwel) op een rechte lijn, dan is er (bij benadering) sprake van exponentiële groei.

Bij een rechte lijn op logaritmisch papier hoort exponentiële groei, dus een formule van de vorm $N = b \cdot g^t$.

In het voorbeeld zie je hoe je bij een rechte lijn op logaritmisch papier de formule opstelt.

9

Voorbeeld

Zie figuur 9.5.
Stel de formule op van N als functie van t.

Uitwerking
Rechte lijn op logaritmisch papier, dus $N = b \cdot g^t$.
Lijn door (2, 400) en (6, 20), dus

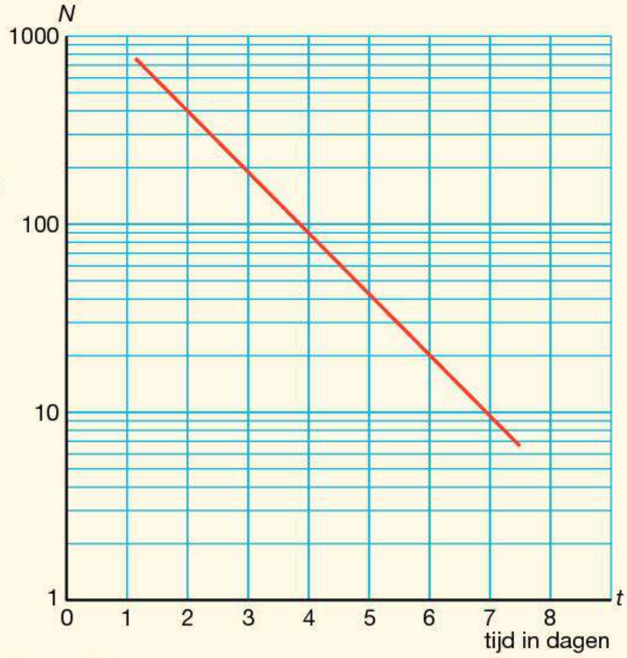
$$g_{4\ \text{dagen}} = \frac{20}{400} = 0{,}05 \text{ en } g_{\text{dag}} = 0{,}05^{\frac{1}{4}} = 0{,}472...$$

$$\left.\begin{array}{l} N = b \cdot 0{,}472...^t \\ t = 2 \text{ en } N = 400 \end{array}\right\} b \cdot 0{,}472...^2 = 400$$

$$b = \frac{400}{0{,}472...^2}$$

$$b \approx 1789$$

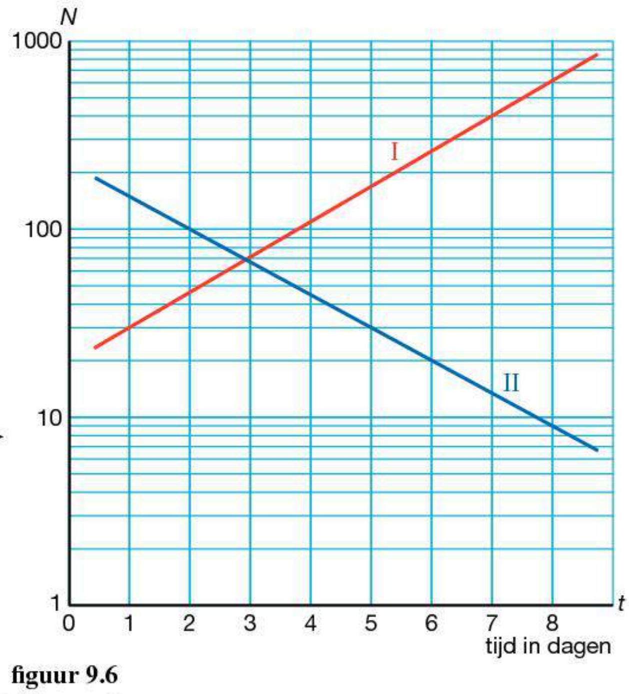
Dus $N = 1789 \cdot 0{,}473^t$.



figuur 9.5

51 Zie figuur 9.6.
a Stel de formule op van grafiek I.
b Stel de formule op van grafiek II.

Zoek twee roosterpunten op de grafiek.



figuur 9.6

A 52 [▸ WERKBLAD] Een astmapatiënt kan verlichting krijgen door een injectie met het medicijn theofylline. Dit medicijn wordt door de lever afgebroken. Na een injectie van 60 mg wordt op een aantal tijdstippen de concentratie van het medicijn in het bloed gemeten.

aantal uren t na injectie	1	3	7	9	11	17	19
concentratie C in mg/l	10,0	7,0	3,5	2,5	2,0	0,7	0,5

a Zet deze gegevens uit op het logaritmisch papier.
b Stel de formule op van C als functie van t.
c Bereken met behulp van de concentratie op $t = 0$ de hoeveelheid bloed van de patiënt.

O 53 Gegeven is de functie $f(x) = 2^{x+3}$.
a Bij welke translatie ontstaat de grafiek van f uit die van $y = 2^x$?
b De grafiek van f ontstaat ook uit die van $y = 2^x$ door een vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met 8.
Licht dit toe.

O 54 Gegeven is de functie $f(x) = {}^2\log(8x)$.
a Bij welke vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as ontstaat de grafiek van f uit die van $y = {}^2\log(x)$?
b De grafiek van f ontstaat ook uit die van $y = {}^2\log(x)$ bij de translatie (0, 3).
Licht dit toe.

Theorie E Standaardgrafieken en transformaties

De grafieken van de standaardfuncties $y = g^x$ en $y = {}^g\log(x)$ zijn standaardgrafieken.

In het schema hieronder zie je het effect van transformaties op deze standaardfuncties.

$y = g^x$ $\xrightarrow{\text{translatie } (p, 0)}$ $y = g^{x-p}$	$y = {}^g\log(x)$ $\xrightarrow{\text{translatie } (p, 0)}$ $y = {}^g\log(x-p)$	Vervang in de formule x door $x - p$.
$y = g^x$ $\xrightarrow{\text{translatie } (0, q)}$ $y = g^x + q$	$y = {}^g\log(x)$ $\xrightarrow{\text{translatie } (0, q)}$ $y = {}^g\log(x) + q$	Tel q op bij de functiewaarde.
$y = g^x$ $\xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } a}$ $y = a \cdot g^x$	$y = {}^g\log(x)$ $\xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } a}$ $y = a \cdot {}^g\log(x)$	Vermenigvuldig de functiewaarde met a.
$y = g^x$ $\xrightarrow{\text{verm. } y\text{-as, } b}$ $y = g^{\frac{1}{b} \cdot x}$	$y = {}^g\log(x)$ $\xrightarrow{\text{verm. } y\text{-as, } b}$ $y = {}^g\log\left(\frac{1}{b} \cdot x\right)$	Vervang in de formule x door $\frac{1}{b} \cdot x$.

In opgave 53 heb je gezien dat bij de grafiek van $y = 2^x$ de transformaties 'translatie (−3, 0)' en 'vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as met 8' op hetzelfde neerkomen.
Dit kun je inzien met de rekenregel $a^{p+q} = a^p \cdot a^q$.
Immers $2^{x+3} = 2^x \cdot 2^3 = 8 \cdot 2^x$.

En in opgave 54 heb je gezien dat bij de grafiek van $y = {}^2\log(x)$ de transformaties 'vermenigvuldigen ten opzichte van de y-as met $\frac{1}{8}$' en 'translatie (0, 3)' op hetzelfde neerkomen.
Dit kun je inzien met de rekenregel ${}^g\log(ab) = {}^g\log(a) + {}^g\log(b)$.
Immers ${}^2\log(8x) = {}^2\log(8) + {}^2\log(x) = 3 + {}^2\log(x)$.

9

Voorbeeld

a Welke vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as levert bij de grafiek van $y = 3^x$ dezelfde beeldfiguur op als de translatie $(-4, 0)$?
b Welke translatie levert bij de grafiek van $y = {}^3\log(x)$ dezelfde beeldfiguur op als de vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met 81?

Uitwerking

a $y = 3^x$

$$\downarrow \text{translatie } (-4, 0)$$

$y = 3^{x+4}$

Er geldt $3^{x+4} = 3^x \cdot 3^4 = 3^x \cdot 81 = 81 \cdot 3^x$.
Dus de vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met 81 levert dezelfde beeldfiguur op.

b $y = {}^3\log(x)$

$$\downarrow \text{verm. } y\text{-as, } 81$$

$y = {}^3\log\left(\frac{1}{81}x\right)$

Er geldt ${}^3\log\left(\frac{1}{81}x\right) = {}^3\log\left(\frac{1}{81}\right) + {}^3\log(x) = -4 + {}^3\log(x)$.
Dus de translatie $(0, -4)$ levert dezelfde beeldfiguur op.

55 **a** Welke vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as levert bij de grafiek van $y = 2^x$ dezelfde beeldfiguur op als de translatie $(5, 0)$?
b Welke translatie levert bij de grafiek van $y = 4^x$ dezelfde beeldfiguur op als de vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met 2?
c Welke translatie levert bij de grafiek van $y = {}^2\log(x)$ dezelfde beeldfiguur op als de vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met $\frac{1}{32}$?
d Welke vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as levert bij de grafiek van $y = {}^4\log(x)$ dezelfde beeldfiguur op als de translatie $\left(0, \frac{1}{2}\right)$?

56 Gegeven is de functie $f(x) = {}^2\log(x)$.
De grafiek van de functie g ontstaat uit die van f bij de translatie $(3, 0)$.
a Stel de formule van g op.
b De grafiek van g wordt vermenigvuldigd ten opzichte van de y-as met $\frac{1}{4}$. Zo ontstaat de grafiek van h.
De formule van h is te schrijven in de vorm
$h(x) = q + {}^2\log(x + p)$.
Bereken p en q.

9

Terugblik

Verdubbelingstijd en halveringstijd

De verdubbelingstijd T bij exponentiële groei met groeifactor g is de tijd die verloopt totdat de hoeveelheid verdubbeld is en bereken je door de vergelijking $g^T = 2$ op te lossen.

$g^T = 2$ geeft $T = {}^2\log(g)$

Bij een gegeven verdubbelingstijd kun je het groeipercentage berekenen. Bij een verdubbelingstijd van 7 maanden krijg je $g_{7\text{ maanden}} = 2$, dus $g_{\text{maand}} = 2^{\frac{1}{7}} \approx 1{,}104$. De toename is 10,4% per maand.

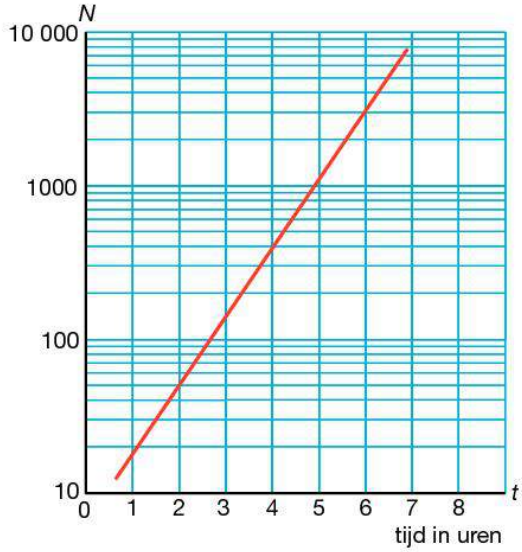
De halveringstijd T bij exponentiële afname met groeifactor g is de tijd die verloopt totdat de hoeveelheid gehalveerd is en bereken je door de vergelijking $g^T = \frac{1}{2}$ op te lossen.

Logaritmisch papier

Bij logaritmisch papier is op de ene as een logaritmische schaalverdeling aangebracht. Op de andere as staat een gewone schaalverdeling.
Op logaritmisch papier is de grafiek van $N = b \cdot g^t$ een rechte lijn.
Zet je gegevens uit op logaritmisch papier en liggen deze punten (vrijwel) op een rechte lijn, dan weet je dat de gegeven punten (bij benadering) bij exponentiële groei horen. Je hebt dan te maken met een formule van de vorm $N = b \cdot g^t$.
De grafiek hiernaast is een rechte lijn door de punten (2, 50) en (6, 3000), dus $g_{4\text{ uur}} = \dfrac{3000}{50} = 60$.
Dit geeft $g_{\text{uur}} = 60^{\frac{1}{4}} \approx 2{,}783...$

$$\left.\begin{array}{l} N = b \cdot 2{,}783...^t \\ t = 2 \text{ en } N = 50 \end{array}\right\} \begin{array}{l} b \cdot 2{,}783...^2 = 50 \\ b = \dfrac{50}{2{,}783...^2} \approx 6{,}45 \end{array}$$

Dus $N = 6{,}45 \cdot 2{,}783^t$.



Standaardgrafieken en transformaties

De translatie $(a, 0)$ en de vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met $\dfrac{1}{g^a}$ leveren bij de grafiek van $y = g^x$ dezelfde beeldfiguur op.

Immers $g^{x-a} = \dfrac{g^x}{g^a} = \dfrac{1}{g^a} \cdot g^x$.

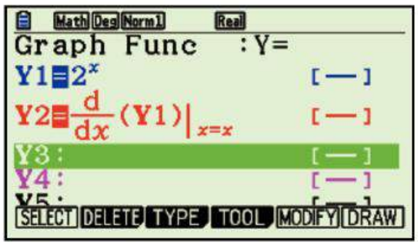
De translatie $(0, b)$ en de vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met $\dfrac{1}{g^b}$ leveren bij de grafiek van $y = {}^g\log(x)$ dezelfde beeldfiguur op.

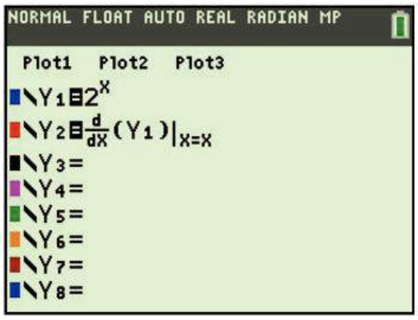
Immers ${}^g\log(x) + b = {}^g\log(x) + {}^g\log(g^b) = {}^g\log(g^b \cdot x)$.

9.4 Het grondtal e

O 57 Gegeven zijn $y_1 = 2^x$ en y_2 is de afgeleide van y_1.

a Plot de grafieken van y_1 en y_2. Zie de GR-schermen hiernaast. Neem Xmin = −3, Xmax = 3, Ymin = 0 en Ymax = 5.





De grafiek van y_2 ontstaat uit de grafiek van y_1 bij een vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as, dus $y_2 = c \cdot y_1$.

b Ga na dat dit zo is door de grafiek van $y_3 = \dfrac{y_2}{y_1}$ te plotten en geef de waarde van c in vier decimalen nauwkeurig.

c Verander $y_1 = 2^x$ in $y_1 = 3^x$.
Ga na dat $\dfrac{y_2}{y_1}$ weer constant is en geef de waarde van deze constante in vier decimalen nauwkeurig.

O 58 Je kent de definitie van de afgeleide van een functie f. Zie de post-it hiernaast.

De definitie van de afgeleide is
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Bij de functie $f(x) = 2^x$ krijg je $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2^h - 1}{h} \cdot 2^x$.

a Toon dit aan.

b Licht toe dat $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2^h - 1}{h}$.

c Licht toe dat $f(x) = 2^x$ geeft $f'(x) = f'(0) \cdot 2^x$.

9

Theorie A De afgeleide van $f(x) = a^x$

In opgave 58 heb je gezien dat bij de functie $f(x) = 2^x$ de afgeleide te schrijven is als $f'(x) = f'(0) \cdot 2^x$.
We gaan aantonen dat in het algemeen geldt
$f(x) = a^x$ geeft $f'(x) = f'(0) \cdot a^x$.
Dit gaat als volgt.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(a^h - 1) \cdot a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} \cdot a^x \; \ldots \; \textbf{(1)}$$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} \cdot a^0 = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} \cdot 1 = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} \; \ldots \; \textbf{(2)}$$

Uit **(1)** en **(2)** volgt $f(x) = a^x$ geeft $f'(x) = f'(0) \cdot a^x$.

In opgave 57 vond je dat $[2^x]' \approx 0{,}6931 \cdot 2^x$ en $[3^x]' \approx 1{,}0986 \cdot 3^x$.
Omdat $0{,}6931 < 1$ en $1{,}0986 > 1$ kun je je afvragen of er een grondtal a is waarbij $[a^x]' = 1 \cdot a^x$, ofwel dat de afgeleide gelijk is aan de functie zelf!

Omdat $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a^h - 1}{h}$ zou dus moeten gelden $\dfrac{a^h - 1}{h} \approx 1$ voor $h \approx 0$, ofwel $a^h - 1 \approx h$ voor $h \approx 0$.

Uit $a^h - 1 \approx h$ volgt $a^h \approx h + 1$, dus $a \approx (h + 1)^{\frac{1}{h}}$ voor $h \approx 0$.
We moeten dus onderzoeken wat de uitkomst is van $\lim\limits_{h \to 0} (h + 1)^{\frac{1}{h}}$.

O 59 Gegeven is $y_1 = (x + 1)^{\frac{1}{x}}$.

a Plot de grafiek van y_1.
b Waarom lukt het niet om y_1 te berekenen voor $x = 0$?
c Bereken y_1 voor $x = 0{,}01$, voor $x = 0{,}001$, voor $x = 0{,}0001$ en voor $x = 0{,}00001$. Rond af op vier decimalen.
d Geef in drie decimalen nauwkeurig het getal a waarvoor geldt $f(x) = a^x$ geeft $f'(x) = a^x$.

Theorie B Het getal e

In opgave 59 heb je gezien dat $\lim\limits_{h \to 0} (h + 1)^{\frac{1}{h}} \approx 2{,}718$, dus voor $a \approx 2{,}718$ geldt $[a^x]' = 1 \cdot a^x$.
Dit grondtal speelt een belangrijke rol in de wiskunde en in allerlei vakgebieden waar wiskunde wordt gebruikt. Daarom wordt dit getal met een eigen letter aangeduid, de letter **e**.

$f(x) = \mathrm{e}^x$ geeft $f'(x) = \mathrm{e}^x$

Met het getal e reken je net zo als met andere getallen, dus net als $5\sqrt{2} + \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ is $5\mathrm{e} + \mathrm{e} = 6\mathrm{e}$.
En zo gelden voor e ook de rekenregels voor machten.

$\mathrm{e}^p \cdot \mathrm{e}^q = \mathrm{e}^{p+q}$	$(\mathrm{e}^p)^q = \mathrm{e}^{pq}$	$(a\mathrm{e})^p = a^p\mathrm{e}^p$
$\mathrm{e}^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{\mathrm{e}}$	$\mathrm{e}^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\mathrm{e}^p}$	$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}$
$\dfrac{\mathrm{e}^p}{\mathrm{e}^q} = \mathrm{e}^{p-q}$	$\mathrm{e}^{-p} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^p}$	$\mathrm{e}^0 = 1$

9

Voorbeeld

Herleid.

a $2e^2 + e^2$
b $e^{2x} \cdot e^x$
c $(e^{2x} + 3)^2$

Uitwerking

a $2e^2 + e^2 = 3e^2$
b $e^{2x} \cdot e^x = e^{2x+x} = e^{3x}$
c $(e^{2x} + 3)^2 = (e^{2x})^2 + 2 \cdot 3 \cdot e^{2x} + 3^2 = e^{4x} + 6e^{2x} + 9$

Het oplossen van vergelijkingen met **e-machten** gaat op dezelfde manier als het oplossen van exponentiële vergelijkingen met een ander grondtal.
Je kijkt eerst of de vergelijking is te herleiden tot de vorm $e^A = e^B$.
Lukt dit, dan gebruik je vervolgens $e^A = e^B$ geeft $A = B$.
Lukt dit niet, dan kun je misschien een factor buiten haakjes halen of een substitutie gebruiken.

Voorbeeld

Los algebraïsch op.

a $e^{2x} - e^x = 0$
b $3x e^x = 11e^x$
c $e^{2x} + 2e^x = 3$

Uitwerking

a $e^{2x} - e^x = 0$
$e^{2x} = e^x$
$2x = x$
$x = 0$

b $3x e^x = 11e^x$
$3x = 11$
$x = 3\frac{3}{4}$

Delen door e^x mag, want $e^x \neq 0$.

c $e^{2x} + 2e^x = 3$
$(e^x)^2 + 2e^x - 3 = 0$
Stel $e^x = u$.
$u^2 + 2u - 3 = 0$
$(u - 1)(u + 3) = 0$
$u = 1 \vee u = -3$
$e^x = 1 \vee e^x = -3$
$x = 0$ geen opl.

60 Herleid.

a $2e^2 - e^2$
b $4\sqrt{e} - \sqrt{e}$
c $5e^2 \cdot 3e^3$
d $\dfrac{12e^6}{4e^2}$
e $e^{5x} \cdot e^x$
f $e^x \cdot e^2$
g $5e^x - 3e^x$
h $e^x(e^2 + 1)$
i $e^x(e^x + 1)$
j $(e^x + 1)^2$
k $(e^{3x} + 3)^2$
l $\dfrac{6e^{2x} - e^x}{e^x}$

A 61 Herleid.

a $\left(2 + 3e^{\frac{1}{2}x}\right)^2$ **b** $(e^x + e^{-x})^2$ **c** $\dfrac{e^{2x} - 4}{e^x - 2}$

62 Los algebraïsch op.

a $(2x + 4)e^x = 0$ **c** $x^2 e^x = e^x$ **e** $e^{4x} - 1 = 0$

b $x^2 e^x = 3x e^x$ **d** $e^{3x} - e^x = 0$ **f** $e^x \cdot e^x = e^6$

A 63 Los algebraïsch op.

a $e^x + e^x = 2e^6$ **c** $2x e^x + e^x = 0$ **e** $e^{2x} + e^x = 2$

b $\dfrac{e^{5x}}{e^x} = e$ **d** $e^{x+2} - \sqrt{e} = 0$ **f** $e^{6x} + 1 = 2e^{3x}$

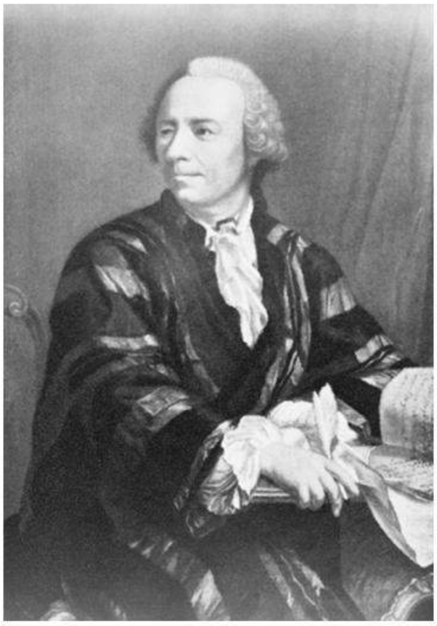
O 64 **a** Differentieer $f(x) = x e^x$. Gebruik de productregel.

b Differentieer $g(x) = \dfrac{e^x}{x + 1}$. Gebruik de quotiëntregel.

c Differentieer $h(x) = e^{2x + 3}$. Gebruik de kettingregel.

$[e^x]' = e^x$

Geschiedenis Euler



Leonhard Euler (1707-1783) is een van de meest vooraanstaande wiskundigen uit de geschiedenis. De eerste lessen in wiskunde kreeg hij van zijn vader, een dominee uit Basel. Na zijn opleiding op het gymnasium van Basel studeerde hij theologie en wiskunde. Op twintigjarige leeftijd werd hij benoemd tot hoogleraar natuurkunde aan de door tsaar Peter de Grote gestichte academie van Sint-Petersburg. In 1731 werd hij daar hoogleraar wiskunde.
Euler was bijzonder productief: hij publiceerde in totaal 886 boeken en geschriften.
De functienotatie $f(x)$ werd door hem ingevoerd, evenals de symbolen voor de getallen π en e.
Euler bewees dat e een irrationaal getal is. Een irrationaal getal is een getal dat niet als breuk te schrijven is. De decimale ontwikkeling van zo'n getal gaat oneindig door en vertoont geen enkele regelmaat.
In zijn boek Introductio in Analysin Infinitorum geeft Euler e in 23 decimalen nauwkeurig.

Hij gebruikte $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$ en vond

$e \approx 2{,}71828182845904523536028$.

9

Theorie C Functies met e-machten differentiëren

Bij het berekenen van de afgeleide van een functie met een e-macht gebruik je $[e^x]' = e^x$. Verder gebruik je de volgende regels voor het differentiëren.

$f(x) = a$ geeft $f'(x) = 0$	
$f(x) = ax^n$ geeft $f'(x) = nax^{n-1}$	
$f(x) = c \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = c \cdot g'(x)$	
$s(x) = f(x) + g(x)$ geeft $s'(x) = f'(x) + g'(x)$	somregel
$p(x) = f(x) \cdot g(x)$ geeft $p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	productregel
$q(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)}$ geeft $q'(x) = \dfrac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$	quotiëntregel
$f(x) = u(v(x))$ geeft $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$	kettingregel

In opgave 64c heb je een voorbeeld gezien van de regel $[e^{ax+b}]' = a\,e^{ax+b}$. Bij het differentiëren kun je hier vaak handig gebruik van maken.

$[e^{ax+b}]' = a\,e^{ax+b}$

Voorbeeld

Bereken de afgeleide.

a $f(x) = 3e^x + \dfrac{1}{x^2}$

b $g(x) = (x^2 + 2)e^x$

c $h(x) = xe^{2x+3}$

d $k(x) = \dfrac{e^{x^2}}{2x + 1}$

Uitwerking

a $f(x) = 3e^x + \dfrac{1}{x^2} = 3e^x + x^{-2}$ geeft $f'(x) = 3e^x - 2x^{-3} = 3e^x - \dfrac{2}{x^3}$

b $g(x) = (x^2 + 2)e^x$ geeft $g'(x) = 2xe^x + (x^2 + 2)e^x = (x^2 + 2x + 2)e^x$

c $h(x) = xe^{2x+3}$ geeft $h'(x) = 1 \cdot e^{2x+3} + x \cdot 2e^{2x+3} = (2x + 1)e^{2x+3}$

d $k(x) = \dfrac{e^{x^2}}{2x + 1}$ geeft

$$k'(x) = \frac{(2x + 1) \cdot e^{x^2} \cdot 2x - e^{x^2} \cdot 2}{(2x + 1)^2} = \frac{(4x^2 + 2x)e^{x^2} - 2e^{x^2}}{(2x + 1)^2} = \frac{(4x^2 + 2x - 2)e^{x^2}}{(2x + 1)^2}$$

Voor het invoeren van formules met een e-macht zit op de GR een toets. Deze gebruik je ook om e-machten te benaderen.

9

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = x\,\mathrm{e}^x + 2$.

a Bereken exact de extreme waarde van f.

b Stel langs algebraïsche weg de formule op van de buigraaklijn l van de grafiek van f.

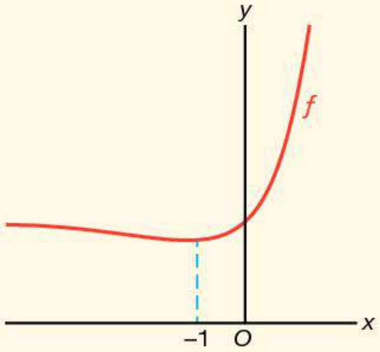
Uitwerking

a $f(x) = x\,\mathrm{e}^x + 2$ geeft $f'(x) = 1 \cdot \mathrm{e}^x + x \cdot \mathrm{e}^x = (1 + x)\mathrm{e}^x$

$f'(x) = 0$ geeft $(1 + x)\mathrm{e}^x = 0$

$1 + x = 0$

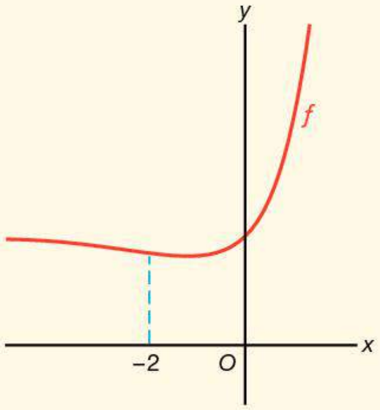
$x = -1$



min. is $f(-1) = -1 \cdot \mathrm{e}^{-1} + 2 = 2 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

b $f'(x) = (1 + x)\mathrm{e}^x$ geeft $f''(x) = 1 \cdot \mathrm{e}^x + (1 + x) \cdot \mathrm{e}^x = (2 + x)\mathrm{e}^x$

$f''(x) = 0$ geeft $(2 + x)\mathrm{e}^x = 0$, dus $x = -2$.



De grafiek heeft een buigpunt voor $x = -2$.

Stel l: $y = ax + b$ met $a = f'(-2) = (1 - 2)\mathrm{e}^{-2} = -\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}x + b \\ f(-2) = -2\mathrm{e}^{-2} + 2 = 2 - \dfrac{2}{\mathrm{e}^2} \end{array}\right\} -\dfrac{1}{\mathrm{e}^2} \cdot -2 + b = 2 - \dfrac{2}{\mathrm{e}^2}$$

$$\dfrac{2}{\mathrm{e}^2} + b = 2 - \dfrac{2}{\mathrm{e}^2}$$

$$b = 2 - \dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$$

Dus l: $y = -\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}x + 2 - \dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$.

9

65 Differentieer.

a $f(x) = e^x + 2$

b $f(x) = 2e^x + \dfrac{1}{x}$

c $f(x) = x e^x + 4$

d $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$

e $f(x) = \dfrac{2e^x}{x - 1}$

f $f(x) = (2x - 4)e^x$

66 Bereken de afgeleide.

a $f(x) = e^{x^2 + x}$

b $g(x) = x^2 + 2e^{3x}$

c $h(x) = x e^{x^2}$

d $j(x) = \dfrac{2e^{-x-1}}{x^2}$

e $k(x) = 3x e^{2x-1}$

f $l(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}$

67 Bereken in drie decimalen nauwkeurig.

a $e + 3$

b $-\dfrac{1}{e^2}$

c e^3

d $\dfrac{3e}{(e + 2)^2}$

e $1\frac{1}{3}e^2$

f $\dfrac{e^2}{e - 3}$

68 Gegeven is de functie $f(x) = -x e^x$.

a Bereken exact de extreme waarde van f.

b Stel langs algebraïsche weg de formule op van de buigraaklijn k van de grafiek van f.

69 Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 - 3)e^x$.

a Bereken exact de nulpunten van f.

b Bereken exact de extreme waarden van f.

c Bereken exact de x-coördinaten van de buigpunten van de grafiek van f.

d Licht toe dat de lijn $y = 0$ de horizontale asymptoot is van de grafiek van f.

e Voor welke waarden van p heeft de vergelijking $f(x) = p$ precies twee oplossingen?

A 70 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ en $g(x) = \dfrac{1}{e^{x+3}}$.

a De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = -1$.
De lijn l raakt de grafiek van g in het punt B met $x_B = -1$.
Bereken algebraïsch de x-coördinaat van het snijpunt van k en l.

b De functie h is de somfunctie van f en g, dus $h(x) = f(x) + g(x)$.
Toon algebraïsch aan dat $B_h = \left[\dfrac{3}{2e^2}, \rightarrow\right\rangle$.

9

Terugblik

De afgeleide van $f(x) = a^x$
$f(x) = a^x$ geeft $f'(x) = f'(0) \cdot a^x$

Het getal e
Voor het getal e geldt $[e^x]' = e^x$ en $e \approx 2{,}718$.
Het rekenen met e gaat net zoals met andere getallen.
Bij het herleiden van e-machten gebruik je de rekenregels voor machten.
$3e^2 + e^2 = 4e^2$
$e^{3x} \cdot e^x = e^{3x+x} = e^{4x}$
$(e^{3x} - 1)^2 = (e^{3x})^2 - 2 \cdot e^{3x} + 1 = e^{6x} - 2e^{3x} + 1$

Vergelijkingen zoals $e^{3x} - e^{x-1} = 0$
$e^{3x} - e^{x-1} = 0$
$e^{3x} = e^{x-1}$ Uit $e^A = e^B$ volgt $A = B$.
$3x = x - 1$
$2x = -1$
$x = -\frac{1}{2}$

Vergelijkingen zoals $(x^2 + 2x)e^x = 0$
$(x^2 + 2x)e^x = 0$
$x^2 + 2x = 0$
$x(x + 2) = 0$
$x = 0 \vee x = -2$

Vergelijkingen zoals $e^{6x} + 5e^{3x} = 6$
$e^{6x} + 5e^{3x} = 6$
$(e^{3x})^2 + 5e^{3x} - 6 = 0$
Stel $e^{3x} = u$.
$u^2 + 5u - 6 = 0$
$(u - 1)(u + 6) = 0$
$u = 1 \vee u = -6$
$e^{3x} = 1 \vee e^{3x} = -6$
$3x = 0$ geen opl.
$x = 0$

De afgeleide van functies met e-machten
Bij het differentiëren van $f(x) = x^2 e^x$ gebruik je de productregel.
Je krijgt $f'(x) = 2x\,e^x + x^2 e^x = (x^2 + 2x)e^x$.

Voor de afgeleide van $g(x) = \frac{e^x}{x}$ gebruik je de quotiëntregel.

Je krijgt $g'(x) = \frac{x \cdot e^x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$.
Uit de kettingregel volgt $f(x) = e^{ax+b}$ geeft $f'(x) = a\,e^{ax+b}$.
Dus $h(x) = e^{4x-1}$ geeft $h'(x) = 4\,e^{4x-1}$.

Om de afgeleide van $k(x) = 2\,e^{x^2+1}$ te berekenen, gebruik je de kettingregel.
Je krijgt $k'(x) = 2\,e^{x^2+1} \cdot 2x = 4x\,e^{x^2+1}$.

9

9.5 De natuurlijke logaritme

O71 De regel $g^{^g\log(x)} = x$ gebruik je om 2 als macht van e te schrijven. Je krijgt $2 = \mathrm{e}^{^{\mathrm{e}}\log(2)}$.

a Licht toe dat $2^x = \mathrm{e}^{^{\mathrm{e}}\log(2) \cdot x}$.

b Toon met behulp van $2^x = \mathrm{e}^{^{\mathrm{e}}\log(2) \cdot x}$ aan dat $[2^x]' = {}^{\mathrm{e}}\log(2) \cdot 2^x$.

Theorie A Logaritmen met grondtal e

Om $f(x) = a^x$ te differentiëren, schrijf je eerst a^x als macht van e.
Je krijgt $f(x) = a^x = \mathrm{e}^{^{\mathrm{e}}\log(a) \cdot x}$.
De kettingregel geeft $f'(x) = \mathrm{e}^{^{\mathrm{e}}\log(a) \cdot x} \cdot {}^{\mathrm{e}}\log(a) = a^x \cdot {}^{\mathrm{e}}\log(a)$.

$\boxed{\mathrm{e}^{^{\mathrm{e}}\log(a) \cdot x} = a^x}$

De logaritme met het grondtal e heet de **natuurlijke logaritme** en wordt aangegeven met **ln**. Dus ${}^{\mathrm{e}}\log(a) = \ln(a)$.

ln is de afkorting van logaritmus naturalis.

De natuurlijke logaritme van een getal a is de logaritme van a met grondtal e, dus $\ln(a) = {}^{\mathrm{e}}\log(a)$.

Voor de natuurlijke logaritme gelden de rekenregels voor logaritmen.

Voor $a > 0$ en $b > 0$ geldt

$\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$ $\quad$ ${}^g\log(a) = \dfrac{\ln(a)}{\ln(g)}$

$\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$ $\quad$ $\mathrm{e}^{\ln(a)} = a$

$n \cdot \ln(a) = \ln(a^n)$ $\quad$ $\ln(\mathrm{e}^a) = a$

Het oplossen van vergelijkingen met natuurlijke logaritmen gaat op dezelfde manier als het oplossen van logaritmische vergelijkingen met een ander grondtal.

- Bij de vergelijking $\ln(2x) = \ln(3x - 1)$ gebruik je $\ln(A) = \ln(B)$ geeft $A = B$.
- Bij de vergelijking $2x\ln(3x + 1) = 0$ gebruik je $AB = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$.
- Bij de vergelijking $\ln^2(2x) + \ln(2x) - 6 = 0$ gebruik je de substitutie $\ln(2x) = u$.

Controleer bij het oplossen van de vergelijkingen of de logaritmen voor de gevonden waarden gedefinieerd zijn.

$\ln^2(A)$ betekent $(\ln(A))^2$

9

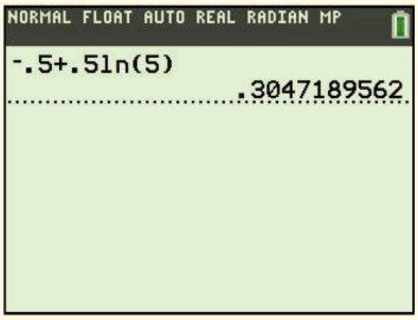
Voorbeeld

a Bereken algebraïsch $\ln(e^2 \cdot \sqrt{e})$.
b Los algebraïsch op $3e^{2x+1} = 15$. Rond het antwoord af op drie decimalen.
c Herleid $3 + \ln(2)$ tot één logaritme.
d Bereken exact de oplossing van $4\ln(x) = 6$.

Uitwerking

a $\ln\left(e^2 \cdot \sqrt{e}\right) = \ln\left(e^2 \cdot e^{\frac{1}{2}}\right) = \ln\left(e^{2\frac{1}{2}}\right) = 2\frac{1}{2}$

b $3e^{2x+1} = 15$
$e^{2x+1} = 5$ $\quad$ $e^A = B$ geeft $A = \ln(B)$
$2x + 1 = \ln(5)$
$2x = -1 + \ln(5)$
$x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(5) \approx 0{,}305$



c $3 + \ln(2) = \ln(e^3) + \ln(2) = \ln(2e^3)$

d $4\ln(x) = 6$
$\ln(x) = 1\frac{1}{2}$
$x = e^{1\frac{1}{2}} = e\sqrt{e}$
vold.

72 Bereken algebraïsch.

a $\ln(e)$
b $\ln\left(e\sqrt{e}\right)$
c $\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)$
d $\ln(1)$
e $3\ln\left(e \cdot \sqrt[3]{e}\right)$
f $\ln^2(e^3)$
g $\ln^3(e^2)$
h $e^{\ln(7)} + e^{2\ln(7)}$
i $e^{\frac{1}{2}\ln(5)}$
j $e^{\ln(10)} \cdot e^{\ln(3)}$

73 Bereken exact de oplossingen.

a $e^{3x} = 12$
b $5e^{2x} = 60$
c $6 + e^{0{,}5x} = 10$
d $\dfrac{3}{e^{2x}} = 10$

74 Herleid tot één logaritme.

a $2\ln(3) + \ln(4)$
b $\ln(20) - 3\ln(2)$
c $4 + \ln(3)$
d $1 + \ln(10)$
e $\frac{1}{2} + 2\ln(6)$
f $e + \ln(2)$

$a = \ln(e^a)$

75 Bereken exact de oplossingen.

a $\ln(x) = -1$
b $4\ln(x) = 2$
c $\ln(3x) = 3$
d $\ln(-x + 2) = -2$
e $\ln^2(x) = \frac{1}{4}$
f $\ln(x) = 1 + \ln(5)$

76 Los algebraïsch op. Rond het antwoord af op drie decimalen.

a $4e^{1-3x} = 20$
b $e^{x^2} = 100$

9

A 77 Bereken exact de oplossingen.

a $3x\ln(x) = 2\ln(x)$
b $\ln^2(x) - \ln(x) = 0$
c $x^2\ln(x+1) = 4\ln(x+1)$
d $\ln^2(x) - 2\ln(x) - 3 = 0$
e $\ln(x+3) - \ln(x-1) = \ln(2)$
f $2\ln(x) = \ln(2) + \ln(x+4)$

Theorie B Exponentiële functies differentiëren

Je hebt gezien $f(x) = a^x$ geeft $f'(x) = a^x \cdot {}^e\log(a)$, dus $f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$.

$f(x) = a^x$ geeft $f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$

Voorbeeld

Differentieer.

a $f(x) = 4^{2x-1}$
b $g(x) = x^2 \cdot 2^x$
c $h(x) = \dfrac{x+1}{2^x}$

Uitwerking

a $f(x) = 4^{2x-1}$ geeft $f'(x) = 4^{2x-1} \cdot \ln(4) \cdot 2 = 2 \cdot 4^{2x-1} \cdot \ln(4)$

b $g(x) = x^2 \cdot 2^x$ geeft $g'(x) = 2x \cdot 2^x + x^2 \cdot 2^x \cdot \ln(2) = (2x + x^2 \cdot \ln(2)) \cdot 2^x$

c $h(x) = \dfrac{x+1}{2^x}$ geeft $h'(x) = \dfrac{2^x \cdot 1 - (x+1) \cdot 2^x \cdot \ln(2)}{(2^x)^2} = \dfrac{1 - (x+1)\ln(2)}{2^x}$

Deel teller en noemer door 2^x.

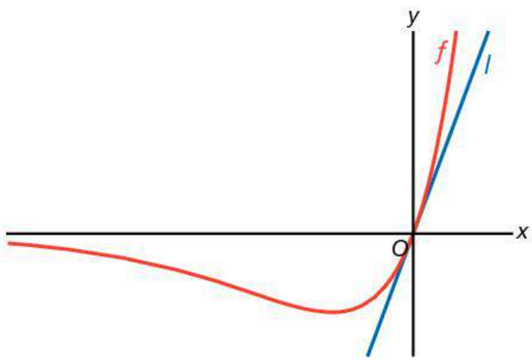
9

78 Differentieer.

a $f(x) = 3^{4x-2}$
b $g(x) = (2x-1) \cdot 2^x$
c $h(x) = \dfrac{2^x + 1}{2^x - 1}$

A 79 Gegeven is de functie $f(x) = 2^{2x} - 2^x$. Zie de figuur hiernaast.

a Bereken algebraïsch het bereik van f.
b Bereken exact voor welke a de vergelijking $f(x) = ax$ twee oplossingen heeft.



figuur 9.7 De lijn l raakt de grafiek van $f(x) = 2^{2x} - 2^x$ in O.

O 80 In deze opgave ga je aantonen dat $f(x) = \ln(x)$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ en $g(x) = {}^2\log(x)$ geeft $g'(x) = \dfrac{1}{x\ln(2)}$.

a Licht met behulp van de kettingregel toe dat uit $e^{\ln(x)} = x$ volgt $e^{\ln(x)} \cdot [\ln(x)]' = 1$.

b Toon aan dat uit vraag a volgt $[\ln(x)]' = \dfrac{1}{x}$.

c Licht toe dat $g(x) = {}^2\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$ en toon met behulp van vraag b aan dat $g'(x) = \dfrac{1}{x\ln(2)}$.

Theorie C Logaritmische functies differentiëren

In opgave 80 heb je gezien dat $[\ln(x)]' = \dfrac{1}{x}$ en $[{}^2\log(x)]' = \dfrac{1}{x\ln(2)}$.
Algemeen geldt

$$[{}^g\log(x)]' = \left[\frac{\ln(x)}{\ln(g)}\right]' = \left[\frac{1}{\ln(g)} \cdot \ln(x)\right]' = \frac{1}{\ln(g)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln(g)}.$$

$f(x) = \ln(x)$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$f(x) = {}^g\log(x)$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln(g)}$

Voorbeeld

Bereken de afgeleide.

a $f(x) = \dfrac{\ln(x) + 1}{x}$

b $g(x) = x^2 \cdot \ln(x)$

c $h(x) = {}^3\log(x^2 + 1)$

Uitwerking

a $f(x) = \dfrac{\ln(x) + 1}{x}$ geeft $f'(x) = \dfrac{x \cdot \frac{1}{x} - (\ln(x) + 1) \cdot 1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln(x) - 1}{x^2} = \dfrac{-\ln(x)}{x^2}$

b $g(x) = x^2 \cdot \ln(x)$ geeft $g'(x) = 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = 2x\ln(x) + x$

c $h(x) = {}^3\log(x^2 + 1)$ geeft $h'(x) = \dfrac{1}{(x^2 + 1) \cdot \ln(3)} \cdot 2x = \dfrac{2x}{(x^2 + 1)\ln(3)}$

9

81 **a** Toon aan dat $[\ln(6x)]' = \frac{1}{x}$.

b Schrijf in één keer de afgeleide op van $f(x) = \ln(2x)$, $g(x) = \ln\left(x\sqrt{2}\right)$ en $h(x) = {}^2\log(3x)$.

c Toon aan dat $[\ln(x^6)]' = \frac{6}{x}$.

d Schrijf in één keer de afgeleide op van $f(x) = \ln(x^2)$, $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x^3}\right)$ en $h(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

82 Differentieer.

a $f(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x}$

b $f(x) = x\ln(x)$

c $f(x) = {}^2\log(4x - 1)$

d $f(x) = \frac{\ln(3x)}{x}$

e $f(x) = x\ln(x^3)$

f $f(x) = \ln(x^2 + x)$

A 83 Bereken de afgeleide.

a $f(x) = \ln(2^x)$

b $f(x) = {}^2\log(x^2 + 1)$

c $f(x) = x\ln^2(x)$

d $f(x) = x^2 \cdot {}^3\log(4x)$

e $f(x) = \log^2(4x)$

f $f(x) = \ln^2(4x^2 + 1)$

84 De regel $\left[x^n\right]' = nx^{n-1}$ heb je al bewezen voor gehele waarden van n. In deze opgave ga je deze regel bewijzen voor niet-gehele waarden van n, daarom geldt $x > 0$.

a Licht toe $x^n = e^{n\ln(x)}$.

b Toon met behulp van de kettingregel aan dat $\left[e^{n\ln(x)}\right]' = e^{n\ln(x)} \cdot \frac{n}{x}$.

c Hoe volgt hieruit dat $\left[x^n\right]' = nx^{n-1}$? Waarom is deze regel nu ook bewezen voor elke niet-gehele n uit $\mathbb{R}$?

9

A 85 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$.

a Stel algebraïsch de formule op van de lijn k die de grafiek raakt in het punt A met $x_A = \frac{1}{e}$.

b Er zijn twee raaklijnen van de grafiek van f met richtingscoëfficiënt -6. Bereken exact de coördinaten van de raakpunten.

D 86 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{10\ln(x)}{x}$.

Stel langs algebraïsche weg de formule op van de buigraaklijn k van de grafiek van f.

Terugblik

Natuurlijke logaritmen

Logaritmen met grondtal e heten natuurlijke logaritmen. De notatie voor ${}^{e}\log(x)$ is $\ln(x)$.
Dus $\ln\left(e \cdot \sqrt[3]{e}\right) = \ln\left(e \cdot e^{\frac{1}{3}}\right) = \ln\left(e^{1\frac{1}{3}}\right) = 1\frac{1}{3}$ en $e^{\ln(5)} = 5$.
Bij het herleiden van natuurlijke logaritmen gebruik je de rekenregels voor logaritmen.
Zo is $5 - \ln(3) = \ln(e^5) - \ln(3) = \ln\left(\frac{e^5}{3}\right)$ en
$3\ln(2) + \ln(6) = \ln(2^3) + \ln(6) = \ln(8) + \ln(6) = \ln(8 \cdot 6) = \ln(48)$.

Vergelijkingen zoals $e^{2x+3} = 7$

$e^{2x+3} = 7$ $\quad$ $e^A = B$ geeft $A = \ln(B)$
$2x + 3 = \ln(7)$
$2x = -3 + \ln(7)$
$x = -1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(7)$

Vergelijkingen zoals $x^2 \ln(x) = 4\ln(x)$

$x^2 \ln(x) = 4\ln(x)$
$\ln(x) = 0 \vee x^2 = 4$
$x = 1 \vee x = -2 \vee x = 2$
vold. vold. niet vold.

Vergelijkingen zoals $2\ln(x) + \ln(9) = 2$

$2\ln(x) + \ln(9) = 2$
$2\ln(x) = 2 - \ln(9)$
$\ln(x) = 1 - \frac{1}{2}\ln(9)$
$\ln(x) = \ln(e) - \ln\left(\sqrt{9}\right)$
$\ln(x) = \ln\left(\frac{e}{3}\right)$ $\quad$ $\ln(A) = \ln(B)$ geeft $A = B$
$x = \frac{1}{3}e$
vold.

Vergelijkingen zoals $\ln^2(x) + \ln(x) - 6 = 0$

$\ln^2(x) + \ln(x) - 6 = 0$
Stel $\ln(x) = u$.
$u^2 + u - 6 = 0$
$(u - 2)(u + 3) = 0$
$u = 2 \vee u = -3$
$\ln(x) = 2 \vee \ln(x) = -3$
$x = e^2 \vee x = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$
vold. vold.

Exponentiële en logaritmische functies differentiëren

$[a^x]' = a^x \cdot \ln(a)$ $\quad$ $[\ln(x)]' = \frac{1}{x}$ $\quad$ $[\ln(ax)]' = \frac{1}{x}$

$[e^x]' = e^x$ $\quad$ $[{}^{g}\log(x)]' = \frac{1}{x\ln(g)}$ $\quad$ $[\ln(x^n)]' = \frac{n}{x}$

Bij het differentiëren heb je vaak de productregel, de quotiëntregel of de kettingregel nodig. Ook combinaties van deze regels komen voor.

- $f(x) = \frac{2^x}{2^x + 1}$ geeft
$$f'(x) = \frac{(2^x + 1) \cdot 2^x \cdot \ln(2) - 2^x \cdot 2^x \cdot \ln(2)}{(2^x + 1)^2} = \frac{(2^x)^2 \cdot \ln(2) + 2^x \cdot \ln(2) - (2^x)^2 \cdot \ln(2)}{(2^x + 1)^2} = \frac{2^x \cdot \ln(2)}{(2^x + 1)^2}$$
- $g(x) = x^2 \cdot \ln(2x)$ geeft $g'(x) = 2x \cdot \ln(2x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x\ln(2x) + x$
- $h(x) = {}^{2}\log(x^2 + 4)$ geeft $h'(x) = \frac{1}{(x^2 + 4) \cdot \ln(2)} \cdot 2x = \frac{2x}{(x^2 + 4)\ln(2)}$

9

Diagnostische toets

9.1 Logaritmen

1 Bereken.
a $^{3}\log(3\sqrt{3})$ **b** $^{2}\log(\frac{1}{4}\sqrt{8})$ **c** $^{2}\log(\frac{1}{16}\cdot\sqrt[3]{2})$

2 Los algebraïsch op.
a $^{4}\log(2x-3)=2$ **b** $^{\frac{1}{2}}\log(x-3)=-4$ **c** $5+3\cdot{}^{2}\log(x)=20$

3 Bereken de exacte oplossing.
a $7^{x-3}=20$ **b** $6\cdot 2^{x}+5=23$ **c** $10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1}=600$

4 **a** Schrijf a als functie van K bij de formule $K=60+10\cdot 2^{2a+1}$.
b Maak q vrij bij de formule $W=40-2\cdot 10^{q-\frac{1}{5}}$.
c Herleid de formule $A=5+2\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{p+2}$ tot de vorm $p=a+b\cdot{}^{\frac{1}{2}}\log(cA+d)$.

9.2 Rekenregels en vergelijkingen

5 **a** Herleid $^{3}\log(5)+2\cdot{}^{3}\log(2)$ tot één logaritme.
b Herleid $3-{}^{2}\log(5)$ tot één logaritme.
c Bereken exact $^{2}\log(8000)+3\cdot{}^{2}\log\left(\frac{1}{5}\right)$.

6 Los algebraïsch op.
a $2\cdot{}^{2}\log(x-1)=1+{}^{2}\log(18)$
b $^{3}\log(2x-1)+{}^{\frac{1}{3}}\log(x+2)=0$
c $^{2}\log(2x-1)={}^{4}\log(x)$
d $\log^{2}(x)=\log(x)+2$
e $^{2}\log(x)=3-{}^{2}\log(x+2)$
f $^{2}\log^{2}(x)+12=7\cdot{}^{2}\log(x)$
g $3^{x}+6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x}=5$
h $9^{x}=3^{x}+12$

9.3 Exponentiële en logaritmische formules

7 **a** Bereken de verdubbelingstijd in jaren bij een toename van 0,2% per maand.
b Bereken de halveringstijd in dagen bij een afname van 20% per week.

8 [▶ WERKBLAD] Een bioloog heeft gedurende een groot aantal jaren onderzoek gedaan naar het aantal kikkers in een waterrijk gebied. In de tabel zie je een schatting van het aantal kikkers N, telkens op 1 september van het genoemde jaar.
a Zet de gegevens uit op het logaritmisch papier.
b Stel de formule op van N als functie van t. Neem t in jaren en $t=0$ in 2000. Rond de groeifactor af op drie decimalen.

jaar	N
2000	15 000
2003	11 700
2005	9900
2009	7100
2014	4700
2015	4300

9

9.4 Het grondtal e

9 Herleid.

a $\dfrac{3e^3 - e^3}{e^2}$

b $\dfrac{e^{3x} - e^x}{e^x}$

c $(e^{3x} - 5)^2$

10 Los algebraïsch op.

a $3x\,e^x - e^x = 0$

b $e^{2x-1} - \sqrt[3]{e^2} = 0$

c $e^{2x} + 2\,e^x = 3$

11 Differentieer.

a $f(x) = 2e^x - 3x^2$

b $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{e^x}$

c $f(x) = (x^2 + 1)\,e^x$

d $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$

e $f(x) = x^2 \cdot e^{2x-1}$

f $f(x) = e^{x^2 + 9}$

12 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

a Bereken exact de extreme waarde van f.

b Stel algebraïsch de formule op van de lijn l die de grafiek van f raakt in het punt A met $x_A = 2$.

9.5 De natuurlijke logaritme

13 Herleid tot één logaritme.

a $4 + \ln(3)$

b $\ln(10) - 4\ln(2)$

14 Bereken exact de oplossingen.

a $2e^{5x} = 16$

b $\ln^2(5x) = 16$

c $2\ln^2(x) - \ln(x) = 0$

d $\ln(9x + 1) - \ln(x + 2) = \ln(4)$

15 Differentieer.

a $f(x) = 2^{3x-4}$

b $f(x) = x \cdot 3^x$

c $f(x) = \ln\left(x \cdot \sqrt[3]{x}\right)$

d $f(x) = {}^2\log(4x)$

e $f(x) = {}^3\log(5x - 6)$

f $f(x) = \ln(3x^2 + 3)$

16 Bereken algebraïsch het bereik van $f(x) = 3^{x-1} + 3^{-x+1}$.

17 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

a Stel algebraïsch de formule op van de raaklijn k van de grafiek van f in het snijpunt met de x-as.

b Bereken algebraïsch het bereik van f.

Bij het speerwerpen in de atletiek werpen mannen een speer met een lengte van 2,6 meter en een gewicht van 800 gram tot ongeveer 90 meter ver. Bij de aanloop moet in een rechte lijn naar voren worden gelopen, waarbij de speer voortdurend in werprichting moet wijzen. Na de aanloop wordt de speer met een snelheid van ongeveer 30 m/s weggeworpen. De kunst is om de krachtigst mogelijke afworp te combineren met de snelst mogelijke aanloop.

Wat leer je?

- Wat vectoren zijn.
- Een vectorvoorstelling opstellen van een lijn.
- Afstanden berekenen bij lijnen en cirkels met de afstandsformule.
- Het berekenen van hoeken met behulp van vectoren.
- Werken met rotaties bij vectoren.
- Rekenen met snelheid en versnelling bij bewegingsvergelijkingen.

Meetkunde met vectoren

10

Voorkennis Lijnen en afstanden

Theorie A De vergelijking $ax + by = c$

De algemene vorm van een lineaire vergelijking met de variabelen x en y is $ax + by = c$. De bijbehorende grafiek is een rechte lijn.

Voorbeeld

Gegeven is de lijn k: $2x + 3y = 12$.

a Bereken de coördinaten van de snijpunten van k met de assen.
b Bereken de richtingscoëfficiënt van k.

Uitwerking

a $y = 0$ geeft $2x = 12$, dus $x = 6$.
Het snijpunt met de x-as is $(6, 0)$.
$x = 0$ geeft $3y = 12$, dus $y = 4$.
Het snijpunt met de y-as is $(0, 4)$.

Snijpunt met de x-as, dus $y = 0$.
Snijpunt met de y-as, dus $x = 0$.

b $2x + 3y = 12$ Schrijf de vergelijking in de vorm $y = ax + b$.
$3y = -2x + 12$
$y = -\frac{2}{3}x + 4$

Dus $rc_k = -\frac{2}{3}$.

1 Gegeven is de lijn l: $3x + 4y = 24$.
a Bereken de coördinaten van de snijpunten van l met de assen.
b Bereken de richtingscoëfficiënt van l.

2 Gegeven zijn de lijnen k: $4x - 3y = 10$ en l: $4x - 3y = 15$.
a Toon aan dat de lijnen k en l evenwijdig zijn.
b De lijn m: $ax + by = c$ is evenwijdig met k en l en gaat door het punt $(6, 5)$.
Geef a en b en bereken c.

Het punt $A(3, 2)$ op de lijn m: $5x + 4y = c$ geeft $c = 5 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 23$.

3 Gegeven zijn de lijnen k: $2x + 5y = 10$ en l: $3x + 5y = 12$.
a De lijn m is evenwijdig met k en gaat door het punt $(3, 2)$.
Stel een vergelijking op van m in de vorm $ax + by = c$.
b De lijn n gaat door het punt $(0, 8)$ en $rc_n = rc_l$.
Stel een formule op van n in de vorm $y = ax + b$.
c De lijn p heeft hetzelfde snijpunt met de x-as als de lijn l en $rc_p = rc_k$.
Stel een vergelijking op van p in de vorm $ax + by = c$.

Theorie B De parametervoorstelling van een lijn

$x(t) = at + c \wedge y(t) = bt + d$ met a en b niet beide nul is een parametervoorstelling van een lijn.
Door t te elimineren krijg je een vergelijking van de lijn.
Bij $x = 2t - 3 \wedge y = 5t - 4$ krijg je

$$\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = 5t - 4 \end{cases} \left| \begin{array}{c} 5 \\ 2 \end{array} \right| \text{ geeft } \begin{cases} 5x = 10t - 15 \\ \underline{2y = 10t - 8} \; - \\ 5x - 2y = -7 \end{cases}$$

Dus de lijn heeft vergelijking $5x - 2y = -7$.

Een lijn heeft oneindig veel parametervoorstellingen.
Neem je $x = t + 1$ bij de lijn $5x - 2y = -7$, dan krijg je
$5(t + 1) - 2y = -7$ en dit geeft $y = 2\frac{1}{2}t + 6$.
Dus ook $x = t + 1 \wedge y = 2\frac{1}{2}t + 6$ is een parametervoorstelling van de lijn $5x - 2y = -7$.

4 **a** Gegeven is de lijn k: $\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 7t - 2 \end{cases}$
Stel een vergelijking op van k.
b Bereken voor welke waarde van p de lijn
$x = -2t + p \wedge y = t + 4$ als vergelijking $x + 2y = 5$ heeft.
c Bereken voor welke waarde van q de lijn $\begin{cases} x = 3t + q \\ y = -2t + 2q \end{cases}$ door het punt $(3, 4)$ gaat.
d Gegeven is dat de lijn l: $4x + 3y = c$ een parametervoorstelling heeft van de vorm $x = t - 2 \wedge y = at + 1$.
Bereken a en c.

Theorie C De afstand van een punt tot een lijn

Bij het berekenen van de afstand van het punt A tot de lijn k gebruik je het volgende werkschema.

1. Stel een vergelijking op van de lijn l door A die loodrecht staat op k.
2. Bereken de coördinaten van het snijpunt B van k en l.
3. Gebruik $d(A, k) = d(A, B)$.

Bij het berekenen van de afstand van het punt A tot de lijn k heb je dus een lijn l nodig die loodrecht staat op k.

Is de lijn k gegeven in de vorm $ax + by = c$ dan is de lijn l van de vorm $bx - ay = d$.

Is de lijn k van de vorm $y = ax + b$ dan is l van de vorm
$y = -\frac{1}{a}x + c$.

$l \perp k$ als $rc_l \cdot rc_k = -1$

10

Voorbeeld

Bereken exact de afstand van het punt $A\left(\frac{1}{2}, -4\right)$ tot de lijn k: $2x + 5y = 10$.

Uitwerking

De lijn l gaat door A en staat loodrecht op k.

$$\left.\begin{array}{l} l: 5x - 2y = c \\ A\left(\frac{1}{2}, -4\right) \end{array}\right\} c = 5 \cdot \tfrac{1}{2} - 2 \cdot -4 = 10\tfrac{1}{2}$$

Dus l: $5x - 2y = 10\frac{1}{2}$.

k snijden met l geeft het punt B.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ 5x - 2y = 10\frac{1}{2} \end{cases} \left|\begin{array}{c} 2 \\ 5 \end{array}\right| \text{ geeft } \begin{cases} 4x + 10y = 20 \\ 25x - 10y = 52\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\underline{\phantom{25x - 10y = 52\tfrac{1}{2}}} +$$

$$29x = 72\tfrac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2\frac{1}{2} \\ 2x + 5y = 10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 2\frac{1}{2} + 5y = 10 \\ 5y = 5 \\ y = 1 \end{array}$$

Dus $B\left(2\frac{1}{2}, 1\right)$.

$d(A, k) = d(A, B) = \sqrt{\left(2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + (1 - -4)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$

5 Bereken exact de afstand van

a het punt $A(3, 5)$ tot de lijn k: $2x + y = 6$

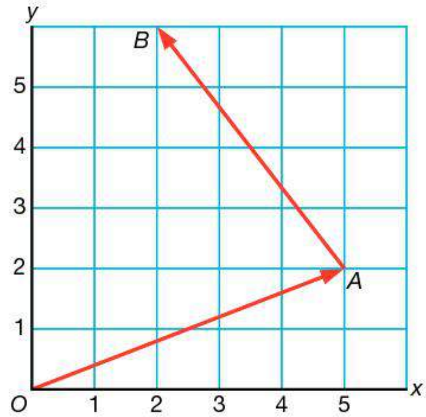
b het punt $B(4, -1)$ tot de lijn l: $y = \frac{1}{3}x + 1$.

6 Gegeven zijn de lijnen k: $x + 2y = 4$ en l: $x - y = 3$.
Onderzoek met een berekening of het punt $A(3, 3)$ dichter bij k dan bij l ligt.

10

10.1 Vectoren en lijnen

O 1 Bij een wandeling in het assenstelsel hiernaast ga je eerst van O naar A en daarna van A naar B.
Bereken exact de lengte van deze wandeling.



figuur 10.1

Theorie A Vectoren optellen en aftrekken

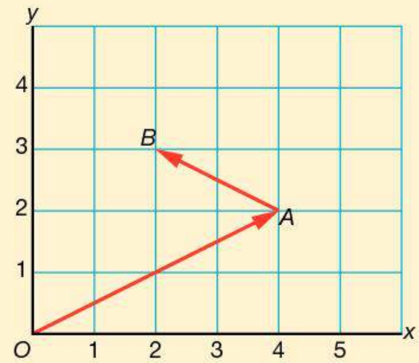
In de figuur hiernaast zijn in een assenstelsel de pijlen van O naar $A(4, 2)$ en van A naar $B(2, 3)$ getekend.
Deze pijlen heten **vectoren**.

Notatie $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ spreek je uit als 'de vector OA is vier twee'.

De getallen 4 en 2 zijn de **kentallen** van $\overrightarrow{OA}$.
Een vector die in O begint wordt vaak genoteerd met een kleine letter. Zo wordt de vector $\overrightarrow{OA}$ genoteerd als $\vec{a}$.

Dus $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.



figuur 10.2

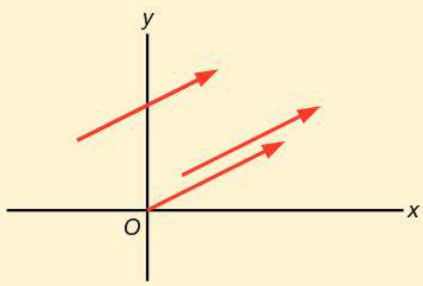
Een vector heeft zowel een **richting** als een **lengte**. De lengte van de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ is te berekenen met de stelling van Pythagoras.

De lengte is $\sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Notatie $|\vec{a}| = 2\sqrt{5}$.
Uitspraak: de lengte van vector a is twee wortel vijf.

Een vector is een lijnstuk met een richting.

De lengte van de vector $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ **is** $\left|\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right| = \sqrt{p^2 + q^2}$.

Je hebt te maken met **gelijke vectoren** als ze dezelfde richting en dezelfde lengte hebben. In de figuur hiernaast zie je drie gelijke vectoren.



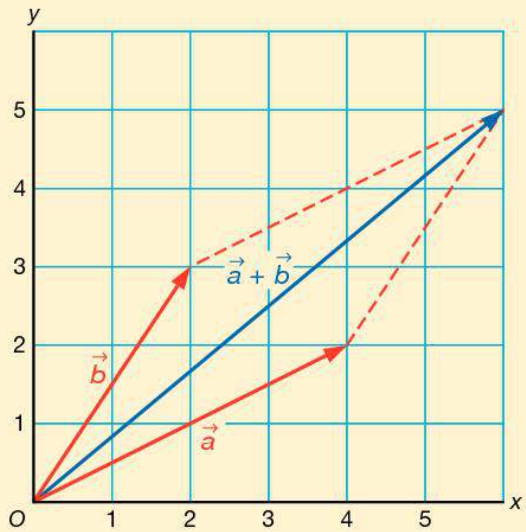
figuur 10.3 gelijke vectoren

Je kunt vectoren optellen. Voor het tekenen van de **somvector** zijn er twee manieren.

- **De parallellogramconstructie**
  In figuur 10.4 is deze constructie uitgevoerd met de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

  Je ziet dat $\vec{a} + \vec{b}$ de diagonaal is van het parallellogram waarvan $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zijden zijn.

  Ga na dat $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

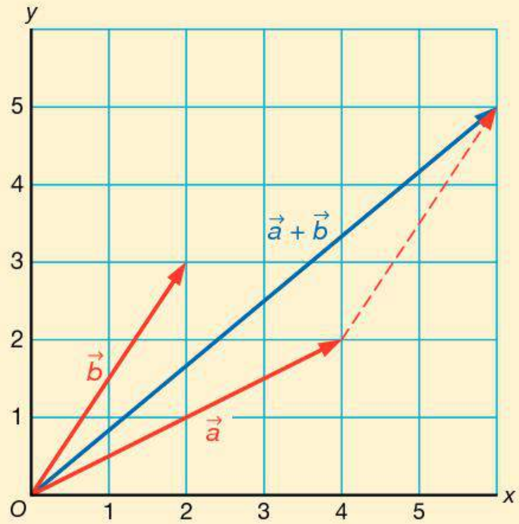


figuur 10.4 De parallellogramconstructie.

- **De kop-staartconstructie**
  Deze constructie is in figuur 10.5 uitgevoerd met de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

  Vector $\vec{b}$ wordt verschoven zo, dat zijn 'staart' aansluit bij de 'kop' van $\vec{a}$.

  Ga na dat je $\vec{a} + \vec{b}$ ook kunt krijgen door $\vec{a}$ met zijn staart aan te sluiten bij de kop van $\vec{b}$.

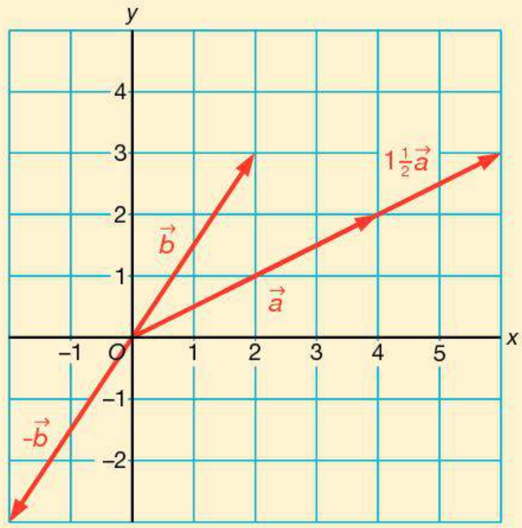


figuur 10.5 De kop-staartconstructie.

Je kunt een vector ook met een getal vermenigvuldigen. In figuur 10.6 zie je de vectoren $\vec{a}$ en $1\frac{1}{2}\vec{a}$. Omdat $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ is $1\frac{1}{2}\vec{a} = 1\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ook zie je de vectoren $\vec{b}$ en $-1 \cdot \vec{b}$ ofwel $-\vec{b}$.
Omdat $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ is $-\vec{b} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

De vectoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $-\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ heten **tegengestelde vectoren**.



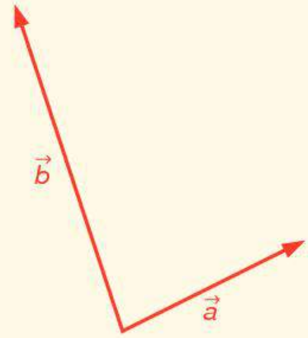
figuur 10.6

$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ en $-\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ heten tegengestelde vectoren.
Tegengestelde vectoren hebben dezelfde lengte en tegengestelde richting.

Voorbeeld

In de figuur hiernaast zijn $\vec{a}$ en $\vec{b}$ getekend.

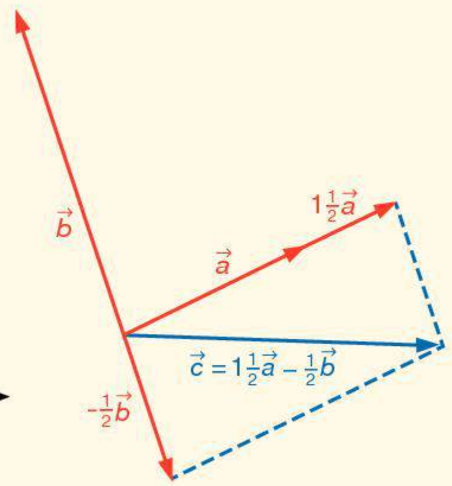
Teken $\vec{c} = 1\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.



figuur 10.7

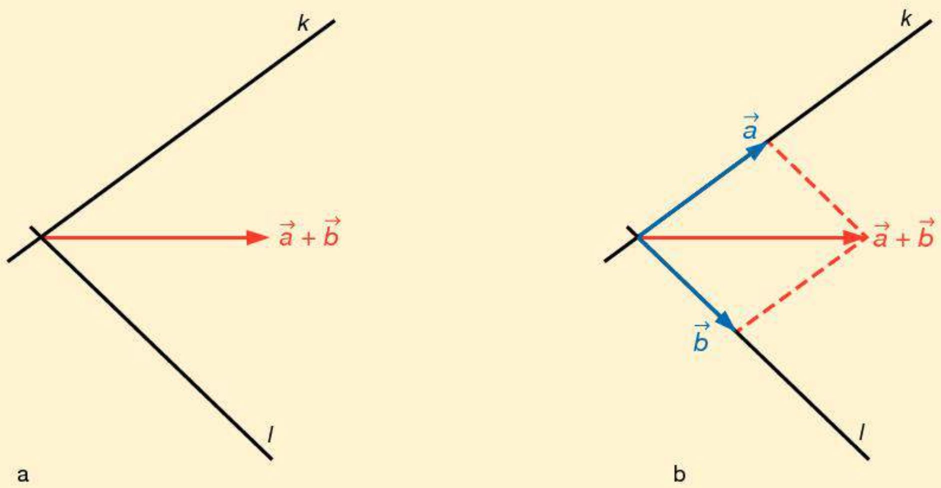
Uitwerking

Teken $-\frac{1}{2}\vec{b}$, dat is de vector die tegengesteld is aan $\frac{1}{2}\vec{b}$, en teken daarna $1\frac{1}{2}\vec{a} + -\frac{1}{2}\vec{b}$.



In figuur 10.8a is de somvector $\vec{a} + \vec{b}$ getekend. Verder is gegeven dat de vector $\vec{a}$ op k ligt en vector $\vec{b}$ op l. Door een parallellogram te tekenen zoals in figuur 10.8b zijn de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ te tekenen.

We zeggen dat we de vector $\vec{a} + \vec{b}$ hebben **ontbonden in de componenten** $\vec{a}$ en $\vec{b}$.



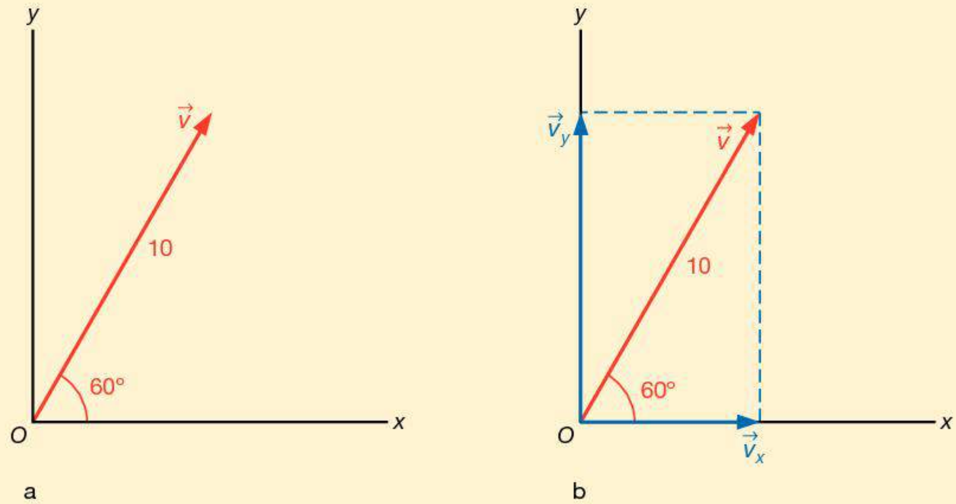
figuur 10.8

In figuur 10.9a zie je de vector $\vec{v}$ met lengte 10 die een hoek van 60° maakt met de x-as. De vector $\vec{v}$ is in figuur 10.9b ontbonden in de **loodrechte componenten** $\vec{v}_x$ en $\vec{v}_y$.

Van deze componenten is de lengte te berekenen. Omdat

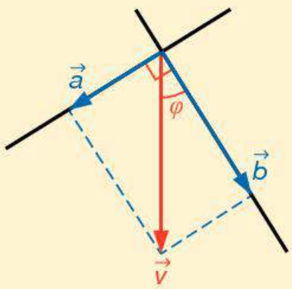
$\cos(60°) = \dfrac{|\vec{v}_x|}{10}$ is $|\vec{v}_x| = 10 \cdot \cos(60°) = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$ en omdat

$\sin(60°) = \dfrac{|\vec{v}_y|}{10}$ is $|\vec{v}_y| = 10 \cdot \sin(60°) = 10 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.



figuur 10.9

De vector $\vec{v}$ hiernaast is ontbonden in de twee onderling loodrechte componenten $\vec{a}$ en $\vec{b}$. Er geldt $|\vec{a}| = |\vec{v}| \cdot \sin(\varphi)$ en $|\vec{b}| = |\vec{v}| \cdot \cos(\varphi)$.



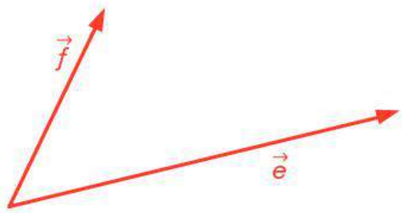
T 2 [▶▶6]

a Bereken de lengte van de vector $\vec{a} = 0{,}2 \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \end{pmatrix}$.

b Gegeven zijn de vectoren $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ en $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Bereken de kentallen van de vector $\vec{d} = 2\vec{b} - 3\vec{c}$.

c [▶WERKBLAD] Gegeven zijn de vectoren $\vec{e}$ en $\vec{f}$ in figuur 10.10.
Teken de vector $\vec{g} = 1\frac{1}{2}\vec{e} - \frac{1}{2}\vec{f}$.



figuur 10.10

3 Bereken de lengte van de volgende vectoren.

a $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

b $\vec{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}$

c $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

d $\vec{d} = \begin{pmatrix} -0{,}3 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$

e $\vec{e} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

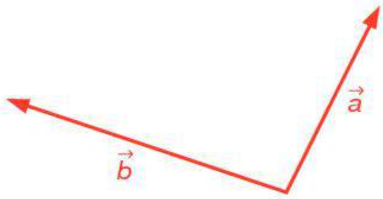
f $\vec{f} = 0{,}6 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

4 Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Bereken de kentallen van de volgende vectoren.

a $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$
b $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b}$
c $\vec{e} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$
d $\vec{f} = 2 \cdot (\vec{a} + \vec{b})$

5 [▶ WERKBLAD] Gegeven zijn de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in figuur 10.11.
Teken de volgende vectoren.

a $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$
b $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$
c $\vec{e} = 2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$
d $\vec{f} = -3\vec{a} + 1\frac{1}{2}\vec{b}$

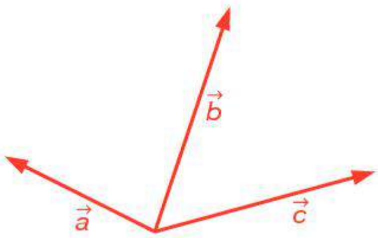


figuur 10.11

6 **a** Uit de kop-staartconstructie volgt $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
Licht dit toe met een tekening.
b Vul in $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = ...$
c Vul in $\overrightarrow{DE} + ... = \overrightarrow{DF}$.
d Vul in $... + \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AL}$.

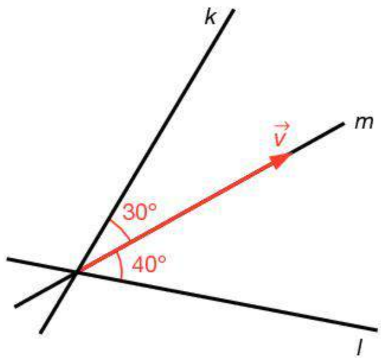
7 [▶ WERKBLAD] Gegeven zijn de vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ in figuur 10.12.
Teken de volgende vectoren.

a $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
b $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$
c $\vec{w} = 2\vec{a} - \vec{b} + 1\frac{1}{2}\vec{c}$
d $\vec{x} = \vec{a} - (\vec{b} + 2\vec{c})$



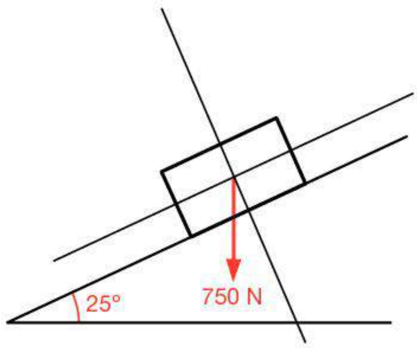
figuur 10.12

D 8 Gegeven is de vector $\vec{v}$ met lengte 12 in figuur 10.13.
De vector kan worden ontbonden in de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ waarbij $\vec{a}$ op de lijn k ligt en $\vec{b}$ op de lijn l ligt. Er is gegeven $\angle(k, m) = 30°$ en $\angle(m, l) = 40°$.
Bereken $|\vec{a}|$ en $|\vec{b}|$ in één decimaal nauwkeurig.



figuur 10.13 De vector $\vec{v}$ ligt op de lijn m.

D 9 In de figuur hiernaast staat een kist op een helling die een hoek van 25° met het horizontale vlak maakt. De zwaartekracht die op de kist werkt is 750 newton.
Ontbind deze kracht in een component langs de helling en een component loodrecht op de helling.
Bereken de grootte van deze componenten in gehelen nauwkeurig.

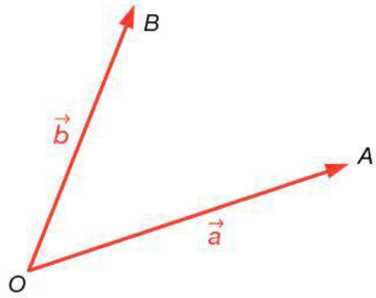


figuur 10.14

10 Gegeven zijn de punten A en B en de vectoren $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ en $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

a Het punt M is het midden van het lijnstuk AB.
Toon aan dat voor $\vec{m} = \overrightarrow{OM}$ geldt $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

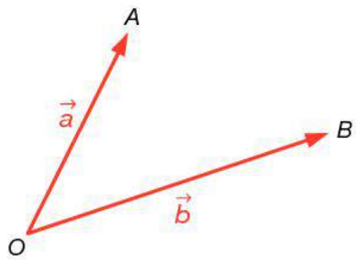
b Toon aan dat $\vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{AB}$.



figuur 10.15

O 11 **a** Teken de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zoals hiernaast en teken in deze figuur $\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{OE} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\overrightarrow{OF} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{OG} = \vec{a} - \vec{b}$ en $\overrightarrow{OH} = \vec{a} - 2\vec{b}$.

b Wat kun je zeggen van de eindpunten van de in a getekende vectoren?

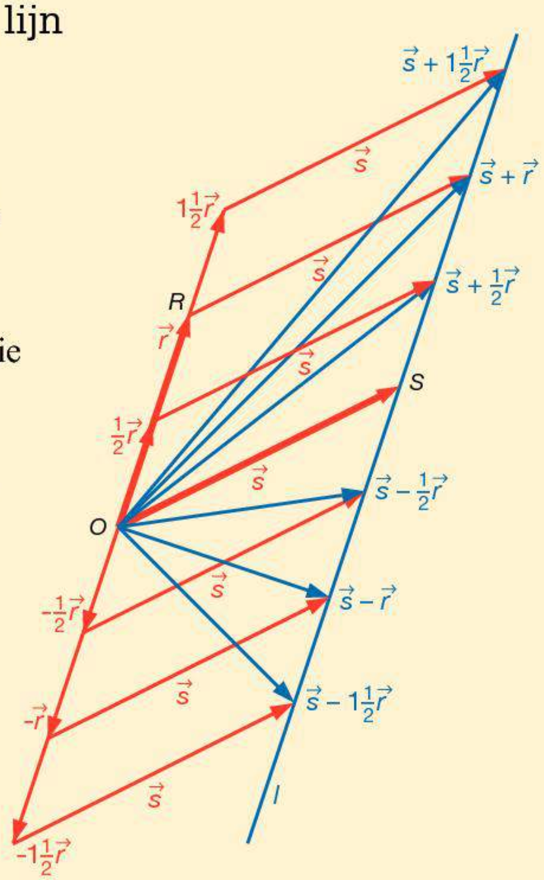


figuur 10.16

Theorie B De vectorvoorstelling van een lijn

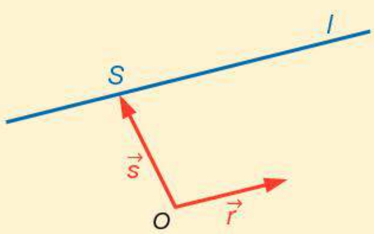
In figuur 10.17 zijn de punten S en R en de vectoren $\overrightarrow{OS} = \vec{s}$ en $\overrightarrow{OR} = \vec{r}$ getekend. Ook zijn de volgende vectoren en hun eindpunten getekend: $\vec{s} - 1\frac{1}{2}\vec{r}$, $\vec{s} - \vec{r}$, $\vec{s} - \frac{1}{2}\vec{r}$, $\vec{s} + \frac{1}{2}\vec{r}$, $\vec{s} + \vec{r}$ en $\vec{s} + 1\frac{1}{2}\vec{r}$.

Al deze eindpunten liggen op de lijn l door het punt S die evenwijdig is met $\vec{r}$.
Dat wil zeggen dat elk punt P van l voldoet aan $\overrightarrow{OP} = \vec{s} + \lambda\vec{r}$. Hierin is λ (labda) een willekeurig getal.
Laat je λ alle waarden aannemen, dan krijg je de hele lijn l. We noemen l: $\overrightarrow{OP} = \vec{s} + \lambda\vec{r}$ een **vectorvoorstelling** van de lijn l. De vector $\vec{s}$ is een **steunvector** van l en de vector $\vec{r}$ is een **richtingsvector** van l.
Een steunvector van een lijn begint in de oorsprong.



figuur 10.17

Elk punt P waarvoor geldt $\overrightarrow{OP} = \vec{s} + \lambda\vec{r}$ ligt op de lijn l door het eindpunt van de steunvector $\overrightarrow{OS} = \vec{s}$ die evenwijdig is met de richtingsvector $\vec{r}$.
l: $\overrightarrow{OP} = \vec{s} + \lambda\vec{r}$ heet een vectorvoorstelling van l.



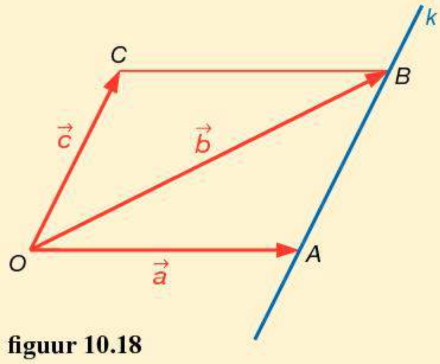
In figuur 10.18 is de lijn k door de punten A en B getekend.

Bovendien is het punt C getekend zo, dat $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b}$.

Uit $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b}$ volgt $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$.

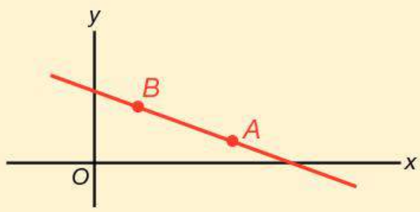
Omdat $\vec{c}$ evenwijdig is met k, is $\vec{c}$ een richtingsvector van k en is dus ook $\vec{b} - \vec{a}$ een richtingsvector van k.

Notatie $\vec{r}_{AB} = \vec{b} - \vec{a}$.



figuur 10.18

Een vectorvoorstelling van de lijn door de punten A en B is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$.



Voorbeeld

De lijn l gaat door de punten $P(3, 4)$ en $Q(5, 6)$.

a Stel een vectorvoorstelling op van de lijn l.

b Onderzoek of het punt $A(27, 28)$ op l ligt.

Uitwerking

a $$\left.\begin{array}{l} l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{p} + \lambda(\vec{q} - \vec{p}) \\ \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{q} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b $x = 27$ geeft $3 + 2\lambda = 27$
$2\lambda = 24$
$\lambda = 12$
$\lambda = 12$ geeft $y = 4 + 2 \cdot 12 = 28$
Dus het punt A ligt op l.

> l is ook te noteren als $x = 3 + 2\lambda \wedge y = 4 + 2\lambda$.

In het voorbeeld is $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ een richtingsvector van l.

Elke vector $c \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ met $c \neq 0$ is evenwijdig met de vector $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Daarom is $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ook een vectorvoorstelling van de lijn l. Met de notatie $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ geven we aan dat de vectoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ evenwijdig zijn.

> De vectoren $\begin{pmatrix} -10 \\ 15 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ zijn evenwijdig.
> Notatie: $\begin{pmatrix} -10 \\ 15 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

10

R 12 Zie het voorbeeld.

a Licht toe dat ook $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ een vectorvoorstelling van l is.

b Licht toe dat ook $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ een vectorvoorstelling van l is.

c Voor welke p is $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\p\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ een vectorvoorstelling van l?

13 Stel een vectorvoorstelling op van

a de lijn k door de punten $A(2, 3)$ en $B(-4, 2)$

b de lijn l door de punten $C(1, 0)$ en $D(2, 3)$

c de lijn m door de punten $E(0, 3)$ en $F(-4, 0)$.

14 Gegeven is de lijn k: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$.
Onderzoek van de punten $A(7, -7)$, $B(-13, 15)$ en $C\left(-3\frac{1}{2}, 7\right)$ of ze op k liggen.

15 Teken in één figuur de lijnen
k: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, l: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$,
m: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ en n: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+\rho\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

λ is labda
μ is mu
ν is nu
ρ is rho

16 Teken in één figuur de lijnstukken met vectorvoorstelling
$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \wedge -1 \leq \lambda \leq 1$,
$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} \wedge 1 \leq \mu \leq 3$ en
$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \wedge -1 \leq \nu \leq 0$.

A 17 Gegeven zijn de punten $A(-1, 2)$, $B(3, 4)$ en $C(-5, -2)$.
Stel een vectorvoorstelling op van

a de lijn k door A, evenwijdig met BC

b de lijn l door B en het midden van het lijnstuk AC

c de lijn m door het midden van het lijnstuk AB, evenwijdig met AC

d het lijnstuk BC.

A 18 Gegeven zijn de vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ en $\vec{d}$ die vanuit O de hoekpunten van het parallellogram $ABCD$ aanwijzen.

a Licht toe dat $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) + \lambda(\vec{c} - \vec{d})$ een vectorvoorstelling is van de lijn door de middens van de zijden AD en BC.

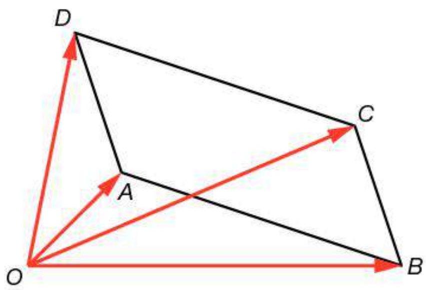
b Stel een vectorvoorstelling op van de lijn
- k door A, die evenwijdig is met BD
- l door B en het midden van de zijde CD
- m door het snijpunt van de diagonalen, die evenwijdig is met BC.

c Welke lijn heeft als vectorvoorstelling

I $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{b} + \lambda(\vec{c} - \vec{a})$

II $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \lambda(\vec{b} - \vec{d})$

III $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{a} + \lambda\left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a}\right)$?



figuur 10.19

R 19 De vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en de parametervoorstelling $x = 3t + 2 \wedge y = 4t - 1$ komen op hetzelfde neer.

a Licht dit toe.

b Geef een parametervoorstelling van de lijn $k\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

c Geef een vectorvoorstelling van de lijn $l\colon x = -t + 3 \wedge y = 2t + 7$.

D 20 De lijn k heeft de vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ en de parametervoorstelling $x = -t - 3 \wedge y = qt - 8$.
Bereken p en q.

10

Terugblik

Vectoren optellen en aftrekken

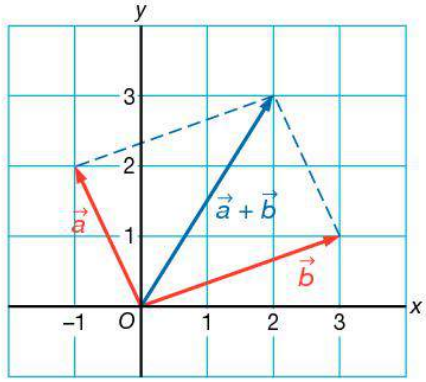
Een vector is een lijnstuk met een richting.

In de figuur hiernaast zijn de vectoren $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en

$\overrightarrow{OB} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ getekend.

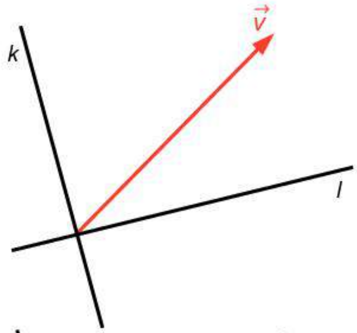
De lengte van $\vec{a}$ is $|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

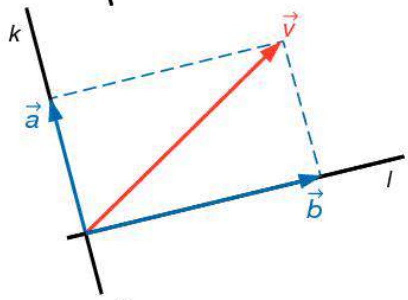
Voor het optellen van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is de parallellogramconstructie gebruikt.



Een vector ontbinden in componenten

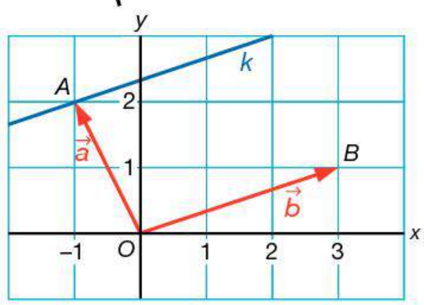
De vector $\vec{v}$ in de figuur hiernaast is te ontbinden in de componenten $\vec{a}$ en $\vec{b}$ waarbij $\vec{a}$ op k en $\vec{b}$ op l ligt. Ook hierbij gebruik je een parallellogram.
In het geval $k \perp l$ wordt $\vec{v}$ ontbonden in twee onderling loodrechte componenten.



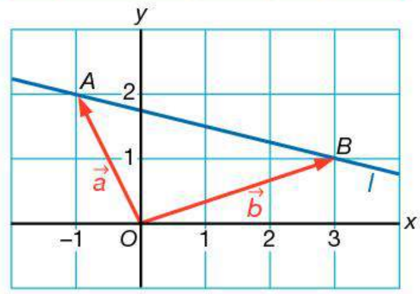


Een vectorvoorstelling van een lijn

De lijn k in de figuur hiernaast gaat door het punt $A(-1, 2)$ en is evenwijdig met de lijn door O en $B(3, 1)$.



Een vectorvoorstelling van k is k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Hierin is $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ een steunvector en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ een richtingsvector.
Een steunvector begint in O.
De lijn l in de figuur hiernaast gaat door de punten $A(-1, 2)$ en $B(3, 1)$.
Voor het opstellen van een vectorvoorstelling van l gebruik je
l: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$.

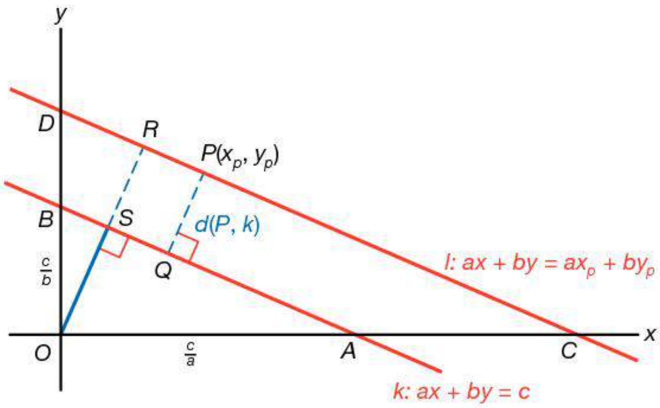


Omdat $\vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ krijg je l: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Merk op dat bijvoorbeeld ook $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ een vectorvoorstelling van l is.

10.2 Afstanden bij lijnen en cirkels

O 21 In figuur 10.20 zie je het punt $P(x_P, y_P)$ met $x_P > 0$ en $y_P > 0$ en de lijn k: $ax + by = c$ met $a > 0$, $b > 0$ en $c > 0$. Verder zie je de lijn l door P evenwijdig met k.
Voor de afstand d van P tot k geldt $d(P, k) = \dfrac{ax_P + by_P - c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.



figuur 10.20

In deze opgave leid je deze formule af.

a Licht toe dat $AB = \sqrt{\left(\dfrac{c}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{c}{b}\right)^2}$ en herleid dit tot $AB = \dfrac{c}{ab} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$.

b Toon aan met behulp van de zijde × hoogte-methode in $\triangle OAB$ dat $OS = \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

c In vraag b heb je gevonden dat $d(O, k) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Beredeneer dat hieruit volgt dat $d(O, l) = \dfrac{ax_P + by_P}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

d Maak het bewijs af.

Theorie A De afstandsformule

In opgave 21 heb je voor de situatie van figuur 10.20 aangetoond dat geldt $d(P, k) = \dfrac{ax_P + by_P - c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
Heb je te maken met een situatie waarin de teller negatief is, dan geldt de formule $d(P, k) = \dfrac{-ax_P - by_P + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. We tonen dat hier niet aan.

De afstand van het punt $P(x_P, y_P)$ tot de lijn k: $ax + by = c$ is

$$d(P, k) = \frac{|ax_P + by_P - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Met deze formule is sneller de afstand van een gegeven punt tot een gegeven lijn te berekenen dan op de manier die je in hoofdstuk 8 hebt geleerd. Bovendien zijn met deze formule ook andere problemen op te lossen.

10

Zoek je de punten P op de x-as die afstand $\sqrt{5}$ tot de lijn k: $x - 2y = 3$ hebben, dan stel je $P(p, 0)$.

Je krijgt $\dfrac{|p - 0 - 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \sqrt{5}$, dus $\dfrac{|p - 3|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

Dit geeft $|p - 3| = 5$

$p - 3 = 5 \vee p - 3 = -5$

$p = 8 \vee p = -2$

Dus de punten zijn $P_1(8, 0)$ en $P_2(-2, 0)$.
Ook zijn met de formule vergelijkingen van lijnen op te stellen. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

Gegeven is het punt $A\left(5\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$.
Stel vergelijkingen op van de lijnen k die door het punt (6, 0) gaan en op afstand $\sqrt{10}$ van A liggen.

Uitwerking
Stel k: $y = ax + b$.
(6, 0) op k geeft $6a + b = 0$, dus $b = -6a$.
k: $y = ax - 6a$ ofwel k: $ax - y - 6a = 0$

$d(A, k) = \sqrt{10}$ geeft $\dfrac{|5\frac{1}{2}a - 3\frac{1}{2} - 6a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{10}$

$$|-\tfrac{1}{2}a - 3\tfrac{1}{2}| = \sqrt{10a^2 + 10}$$

$$\tfrac{1}{4}a^2 + 3\tfrac{1}{2}a + 12\tfrac{1}{4} = 10a^2 + 10$$

$$9\tfrac{3}{4}a^2 - 3\tfrac{1}{2}a - 2\tfrac{1}{4} = 0$$

$$39a^2 - 14a - 9 = 0$$

$$D = (-14)^2 - 4 \cdot 39 \cdot -9 = 1600$$

$$a = \frac{14 - 40}{78} = -\tfrac{1}{3} \vee a = \frac{14 + 40}{78} = \tfrac{9}{13}$$

Dus k_1: $y = -\frac{1}{3}x - 6 \cdot -\frac{1}{3}$ ofwel k_1: $y = -\frac{1}{3}x + 2$

en k_2: $y = \frac{9}{13}x - 6 \cdot \frac{9}{13}$ ofwel k_2: $y = \frac{9}{13}x - 4\frac{2}{13}$.

- $|A| = A \vee |A| = -A$ dus het kwadraat van $|A|$ is A^2.
- $|A| = \sqrt{B}$ geeft $A^2 = B$.

22 Onderzoek met behulp van berekeningen welk van de punten $A(1, -1)$, $B\left(2, 3\frac{1}{2}\right)$ of $C(6, 5)$ het dichtst bij de lijn k: $x - 4y = -4$ ligt.

23 Bereken exact de afstand van het punt
a $A(2, 5)$ tot de lijn k: $3x + 4y = 10$
b $B(2, -1)$ tot de lijn l: $y = -2x + 5$
c $C(-1, 2)$ tot de lijn m: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$
d $D(-3, 1)$ tot de lijn n: $x = 2t + 2 \wedge y = 3t + 4$.

24 Gegeven is de lijn k: $3x + 4y = 12$.
De lijnen l en m liggen op afstand 2 van k.

a Stel vergelijkingen op van l en m.
b Bereken de coördinaten van de punten P op de x-as die op afstand 3 van k liggen.

25 **a** Stel vergelijkingen op van de lijnen k die door het punt $A(0, 4)$ gaan en op afstand 5 van het punt $B\left(5\frac{1}{2}, 5\right)$ liggen.
b Stel vergelijkingen op van de lijnen l die door het punt $C(3, 0)$ gaan en op afstand $\sqrt{5}$ van het punt $D(6, 4)$ liggen.

A 26 Gegeven zijn de punten $A(2, 6)$ en $B(5, 1)$.
Stel een vergelijking op van de lijn k met richtingscoëfficiënt 3 waarvoor geldt $d(A, k) = d(B, k)$.

A 27 Bereken de coördinaten van de punten op de parabool $y = 2x^2$ die afstand $\sqrt{5}$ tot de lijn k: $x - 2y = 2$ hebben.

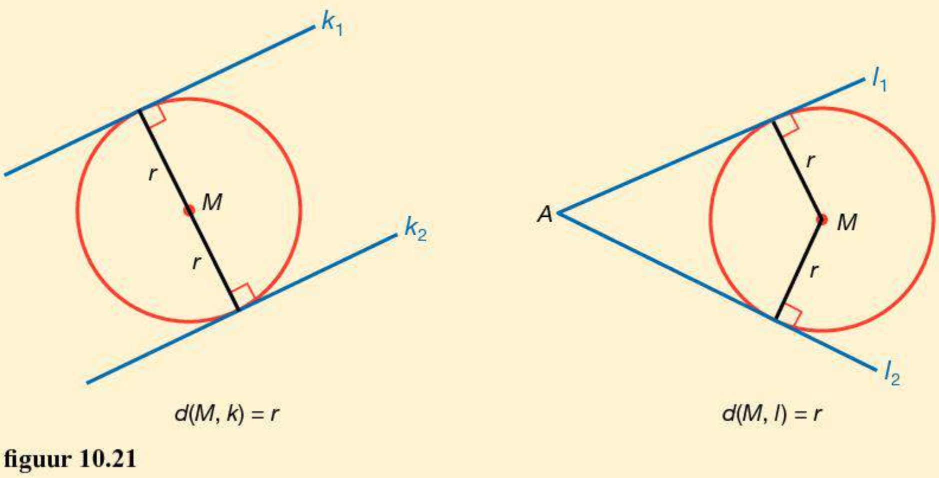
D 28 Gegeven zijn de punten $A(4, 0)$ en $B(6, 0)$.
Stel vergelijkingen op van de lijnen k waarvoor geldt $d(A, k) = \sqrt{2}$ en $d(B, k) = 2\sqrt{2}$.

O 29 Gegeven is de cirkel c: $x^2 + y^2 = 5$. De lijn l: $y = 3x + b$ raakt c.

a Licht toe dat $d(O, l) = \sqrt{5}$.
b Licht toe dat $|b| = 5\sqrt{2}$.
c Geef de vergelijkingen van de lijnen l_1 en l_2 die c raken en richtingscoëfficiënt 3 hebben.

Theorie B Raaklijnen aan cirkels

Om vergelijkingen op te stellen van lijnen k met een gegeven richtingscoëfficiënt die een cirkel raken kun je gebruiken dat $d(M, k) = r$. Hierin is M het middelpunt en r de straal van de cirkel.
Bij het opstellen van de vergelijkingen van de lijnen l die een cirkel raken en door een punt buiten de cirkel gaan gebruik je $d(M, l) = r$.



figuur 10.21

Voorbeeld

Gegeven is de cirkel c: $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ en het punt $A(9, 2)$.
Stel de vergelijkingen op van de lijnen

a k_1 en k_2 met richtingscoëfficiënt $\frac{3}{4}$ die c raken
b l_1 en l_2 die door A gaan en c raken.

Uitwerking

a $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$
$x^2 - 4x + y^2 - 6y - 12 = 0$
$(x - 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 - 12 = 0$
$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$
Dus $M(2, 3)$ en $r = 5$.
Stel k: $y = \frac{3}{4}x + b$ ofwel k: $\frac{3}{4}x - y + b = 0$ ofwel k: $3x - 4y + 4b = 0$.

$d(M, k) = r$ geeft $\dfrac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 + 4b|}{\sqrt{9 + 16}} = 5$
$|4b - 6| = 25$
$4b - 6 = 25 \vee 4b - 6 = -25$
$4b = 31 \vee 4b = -19$
Dus k_1: $3x - 4y + 31 = 0$ en k_2: $3x - 4y - 19 = 0$.

b Stel l: $y = ax + b$.
$A(9, 2)$ op l geeft $9a + b = 2$, dus $b = 2 - 9a$.
l: $y = ax + 2 - 9a$ ofwel l: $ax - y + 2 - 9a = 0$

$d(M, l) = r$ geeft $\dfrac{|2a - 3 + 2 - 9a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 5$
$|-7a - 1| = 5\sqrt{a^2 + 1}$
$49a^2 + 14a + 1 = 25a^2 + 25$
$24a^2 + 14a - 24 = 0$
$12a^2 + 7a - 12 = 0$
$D = 7^2 - 4 \cdot 12 \cdot -12 = 625$
$a = \dfrac{-7 - 25}{24} = -1\frac{1}{3} \vee a = \dfrac{-7 + 25}{24} = \frac{3}{4}$

Dus l_1: $y = -1\frac{1}{3}x + 2 - 9 \cdot -1\frac{1}{3}$ ofwel l_1: $y = -1\frac{1}{3}x + 14$
en l_2: $y = \frac{3}{4}x + 2 - 9 \cdot \frac{3}{4}$ ofwel l_2: $y = \frac{3}{4}x - 4\frac{3}{4}$.

R 30 Zie het voorbeeld.

a In hoofdstuk 8 heb je twee andere manieren geleerd om voorbeeld a aan te pakken:
1 met de discriminant (de discriminantmethode)
2 door gebruik te maken van de lijn door M die loodrecht op k staat.

Werk deze twee methoden uit.
Welke van de drie methoden heeft je voorkeur?

b Voorbeeld b kun je ook aanpakken met de discriminantmethode.
Waarom levert deze methode in dit geval onaangenaam rekenwerk op?

31 Gegeven is de cirkel c: $x^2 + y^2 = 10$ en het punt $A(10, 0)$.
Stel vergelijkingen op van de lijnen

a l_1 en l_2 met richtingscoëfficiënt 3 die c raken

b m_1 en m_2 die door A gaan en c raken.

32 Gegeven is de cirkel c: $x^2 + y^2 = 17$.

a Stel een vergelijking op van de lijn k die c raakt in het punt $A(-4, -1)$.

b Stel vergelijkingen op van de lijnen m_1 en m_2 die c raken en loodrecht staan op de lijn l: $4x - y = 3$.

c Stel vergelijkingen op van de lijnen n_1 en n_2 die door het punt $B(0, 17)$ gaan en c raken.

33 Gegeven is de cirkel c: $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 19 = 0$.

a Stel een vergelijking op van de lijn k die c raakt in het punt $A(4, 5)$.

b Stel vergelijkingen op van de lijnen l_1 en l_2 met richtingscoëfficiënt 3 die c raken.

c Stel vergelijkingen op van de lijnen m_1 en m_2 die door het punt $B(9, 0)$ gaan en c raken.

A 34 Gegeven is de cirkel c: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 12 = 0$.

a Stel een vergelijking op van de lijn k die c raakt in het punt $A(-3, 1)$.

b Stel vergelijkingen op van de lijnen l_1 en l_2 die c raken en loodrecht staan op de lijn m: $4x - y = 1$.

c Stel vergelijkingen op van de lijnen n_1 en n_2 die door het punt $B(6, -1)$ gaan en c raken.

D 35 De cirkel met middelpunt O en straal r raakt de lijn k die de assen snijdt in de punten $(2r, 0)$ en $(0, 4)$.
Bereken r.

Terugblik

De afstand van een punt tot een lijn

De afstand van het punt $P(x_P, y_P)$ tot de lijn k: $ax + by = c$ bereken je met de formule $d(P, k) = \dfrac{|ax_P + by_P - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Zo is de afstand van het punt $A(3, 2)$ tot de lijn k: $4x - 5y = 6$ gelijk aan

$$d(A, k) = \frac{|4 \cdot 3 - 5 \cdot 2 - 6|}{\sqrt{16 + 25}} = \frac{4}{\sqrt{41}}.$$

Met de formule stel je als volgt vergelijkingen op van de lijnen die op afstand 3 van de lijn k: $4x - 3y = 10$ liggen.
Merk op dat het punt $A\left(2\frac{1}{2}, 0\right)$ op k ligt.
Stel l: $4x - 3y = c$.

$$\begin{aligned} d(A, l) = 3 \text{ geeft } & \frac{|4 \cdot 2\frac{1}{2} - 0 - c|}{\sqrt{16 + 9}} = 3 \\ & |10 - c| = 3 \cdot 5 \\ & 10 - c = 15 \vee 10 - c = -15 \\ & c = -5 \vee c = 25 \end{aligned}$$

Dus de lijnen zijn l_1: $4x - 3y = -5$ en l_2: $4x - 3y = 25$.

Raaklijnen aan cirkels

Met de afstandsformule zijn ook vergelijkingen van raaklijnen aan cirkels op te stellen als

- de richtingscoëfficiënt van de raaklijn is gegeven
- een punt buiten de cirkel is gegeven waar de raaklijn doorheen gaat.

Om de vergelijkingen van de lijnen l_1 en l_2 op te stellen die door het punt $A(10, 1)$ gaan en de cirkel c: $(x - 5)^2 + y^2 = 13$ raken stel je l: $y = ax + b$.
$A(10, 1)$ op l geeft $10a + b = 1$, dus $b = 1 - 10a$ en dit geeft l: $y = ax + 1 - 10a$ ofwel l: $ax - y + 1 - 10a = 0$.
De cirkel heeft middelpunt $M(5, 0)$ en straal $r = \sqrt{13}$.

$$\begin{aligned} d(M, l) = r \text{ geeft } & \frac{|5a - 0 + 1 - 10a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{13} \\ & |-5a + 1| = \sqrt{13a^2 + 13} \\ & 25a^2 - 10a + 1 = 13a^2 + 13 \\ & 12a^2 - 10a - 12 = 0 \\ & 6a^2 - 5a - 6 = 0 \\ & D = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot -6 = 169 \\ & a = \frac{5 - 13}{12} = -\tfrac{2}{3} \vee a = \frac{5 + 13}{12} = 1\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Dus $l_1{:}\, y = -\frac{2}{3}x + 1 - 10 \cdot -\frac{2}{3}$ ofwel $l_1{:}\, y = -\frac{2}{3}x + 7\frac{2}{3}$

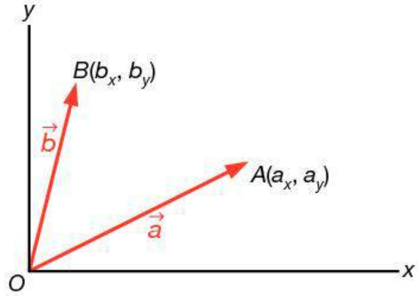
en $l_2{:}\, y = 1\frac{1}{2}x + 1 - 10 \cdot 1\frac{1}{2}$ ofwel $l_2{:}\, y = 1\frac{1}{2}x - 14$.

10.3 Vectoren en hoeken

O 36 Gegeven is figuur 10.22 met de punten $A(a_x, a_y)$ en $B(b_x, b_y)$.

a Licht toe dat $|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2$ en $|\vec{b}|^2 = b_x^2 + b_y^2$.

b Licht toe dat $AB^2 = (b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2$ en herleid dit tot $AB^2 = a_x^2 + a_y^2 + b_x^2 + b_y^2 - 2a_xb_x - 2a_yb_y$.



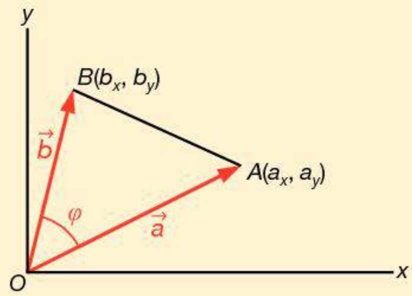
figuur 10.22

Theorie A De hoek tussen twee vectoren

Om de hoek φ tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in figuur 10.23 te berekenen, gebruiken we de cosinusregel in driehoek OAB.

Dit geeft $AB^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$, dus

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - AB^2}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$



figuur 10.23

Met wat je in opgave 36 hebt gevonden geeft dit

$$\cos(\varphi) = \frac{a_x^2 + a_y^2 + b_x^2 + b_y^2 - a_x^2 - a_y^2 - b_x^2 - b_y^2 + 2a_xb_x + 2a_yb_y}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$= \frac{2a_xb_x + 2a_yb_y}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_xb_x + a_yb_y}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

De uitdrukking die in de teller staat heet het **inwendig product**, kortweg het **inproduct**, van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ en wordt genoteerd als $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Het inproduct van de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ is
$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_xb_x + a_yb_y$.

Met behulp van het inproduct kan $\cos(\varphi) = \dfrac{a_xb_x + a_yb_y}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ worden genoteerd als $\cos(\varphi) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Voorwaarde is dat $\vec{a} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \vec{b} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. In het vervolg van dit hoofdstuk vermelden we deze voorwaarde niet meer.

De vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ heet de **nulvector** en wordt genoteerd als $\vec{0}$.

Voor de hoek tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ geldt
$\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

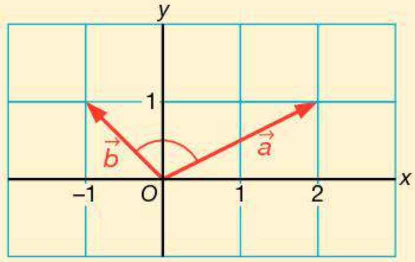
De berekening van de hoek tussen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in figuur 10.24 gaat als volgt.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot -1 + 1 \cdot 1 = -1$

$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ en $|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \dfrac{-1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{10}}$

$\angle(\vec{a}, \vec{b}) \approx 108{,}4°$



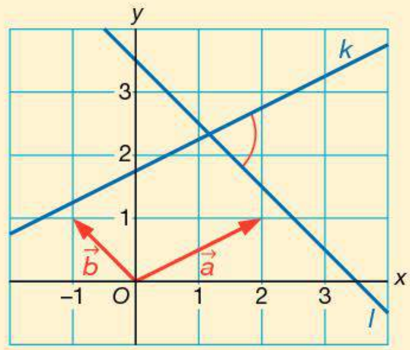
figuur 10.24

Je kunt vectoren gebruiken om de hoek tussen lijnen te berekenen. Voor de berekening van de hoek tussen de lijnen k en l met richtingsvectoren $\vec{r}_k$ en $\vec{r}_l$ bereken je de hoek tussen $\vec{r}_k$ en $\vec{r}_l$.

Omdat de hoek tussen $\vec{r}_k$ en $\vec{r}_l$ stomp kan zijn en de hoek tussen k en l niet, is echter niet altijd

$\cos(\angle(k, l)) = \cos(\angle(\vec{r}_k, \vec{r}_l))$.

Omdat $\cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$, geldt altijd
$\cos(\angle(k, l)) = |\cos(\angle(\vec{r}_k, \vec{r}_l))|$.



figuur 10.25

Voor de hoek tussen twee snijdende lijnen k en l geldt

$\cos(\angle(k, l)) = |\cos(\angle(\vec{r}_k, \vec{r}_l))| = \dfrac{|\vec{r}_k \cdot \vec{r}_l|}{|\vec{r}_k| \cdot |\vec{r}_l|}$.

Afspraak
Geef hoeken in graden in één decimaal nauwkeurig tenzij anders gevraagd.

10

Voorbeeld

Gegeven zijn de lijnen k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en l: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bereken $\angle(k, l)$.

Uitwerking

$$\cos(\angle(k, l)) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|2 \cdot -3 + 3 \cdot 1|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{130}}$$

Dus $\angle(k, l) \approx 74{,}7°$.

T 37 [▶▶41]

a Bereken het inproduct van de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

b Bereken de hoek tussen de vectoren $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c Bereken de hoek tussen de lijnen
$k\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 - \sqrt{3} \\ 1 + 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$ en $l\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

38 Bereken het inproduct van de vectoren.

a $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix}$

b $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

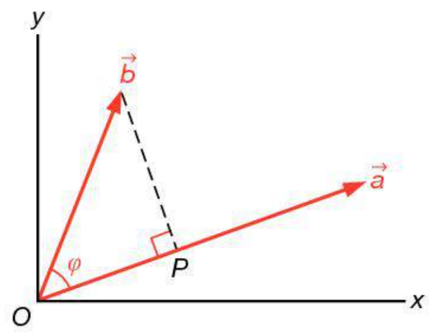
c $\vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ en $\vec{f} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

d $\vec{g} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ en $\vec{h} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Informatief De meetkundige betekenis van het inproduct

In de figuur hiernaast is $\cos(\varphi) = \dfrac{OP}{|\vec{b}|}$, dus $OP = |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$.

Hieruit volgt $|\vec{a}| \cdot OP = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$ en dit is juist het inproduct van $\vec{a}$ en $\vec{b}$.
Dus $\vec{a} \cdot \vec{b}$ is de lengte van $\vec{a}$ keer de lengte van de projectie van $\vec{b}$ op $\vec{a}$.
In het algemeen is het inproduct de lengte van de ene vector keer de lengte van de projectie van de andere vector op de eerste vector.



10

39 Bereken de hoek tussen de vectoren.

a $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

c $\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

d $\vec{g} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ en $\vec{h} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

40 Bereken de hoek tussen de lijnen.

a $k\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $l\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b $m\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $n\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c $p\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $q\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

A 41 Gegeven zijn de punten $A(1, 3)$, $B(4, 2)$ en $C(3, -2)$.
Bereken de hoek tussen de lijnen.

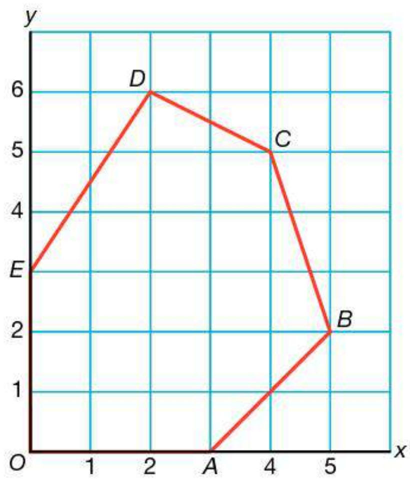
a AB en BC

b AC en BC

A 42 Gegeven is de zeshoek $OABCDE$ in figuur 10.26.

a Bereken $\angle B$.

b Bereken de hoek tussen de diagonalen AD en BE.



figuur 10.26

O 43 **a** Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Toon aan dat $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Wat betekent dit voor de hoek tussen de vectoren?

b Noem een vector die loodrecht staat op $\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

10

O 44 In figuur 10.27 is de lijn k: $2x + 3y = 6$ getekend.

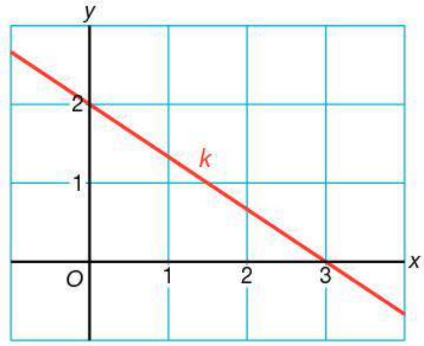
Een richtingsvector van k is $\vec{r}_k = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a Licht dit toe.

De vector $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ staat loodrecht op de lijn k.

b Licht dit toe.

c Noem een vector die loodrecht staat op de lijn l: $5x - 4y = 3$.



figuur 10.27

Theorie B Een normaalvector van een lijn

Uit $\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ volgt

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ geeft $\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = 0$, dus $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$.

Dat betekent dat $\vec{a}$ loodrecht op $\vec{b}$ staat, notatie $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Ook geldt het omgekeerde: $\vec{a} \perp \vec{b}$ geeft $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ komt op hetzelfde neer als $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Een vector die loodrecht staat op $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ is bijvoorbeeld $\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$,

immers $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} = 21 - 21 = 0$. Ook is $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$ **en** $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix}$

In opgave 44 heb je gezien dat de vector $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ loodrecht staat op de lijn k: $2x + 3y = 6$.

Op dezelfde manier kun je aantonen dat de vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ loodrecht staat op de lijn l: $ax + by = c$.

Een vector die loodrecht staat op een lijn heet een **normaalvector van de lijn**. Een normaalvector noteren we met $\vec{n}$.

Dus $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ is een normaalvector van de lijn l: $ax + by = c$.

Een normaalvector van een lijn l is een vector die loodrecht op l staat.

De vector $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ is een normaalvector van de lijn l: $ax + by = c$.

Voor het omzetten van een vectorvoorstelling naar een vergelijking en omgekeerd maak je handig gebruik van normaalvectoren.

10

Voorbeeld

Gegeven zijn de lijnen k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ en l: $3x - 7y = 8$.

a Stel een vergelijking op van k in de vorm $ax + by = c$.
b Stel een vectorvoorstelling op van l.
c Bereken de coördinaten van het snijpunt S van k en l.

Uitwerking

a $\vec{r}_k = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$\left.\begin{array}{l} k\text{: } 5x - 4y = c \\ (2, 3) \text{ op } k \end{array}\right\} c = 5 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = -2$

Dus k: $5x - 4y = -2$.

b $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$, dus $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$(5, 1)$ op l, dus $\vec{s}_l = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Je kunt voor de steunvector elk punt van l gebruiken. Neem bij voorkeur een punt met gehele coördinaten.

Dus l: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

c Substitutie van $x = 2 + 4\lambda$ en $y = 3 + 5\lambda$ in $3x - 7y = 8$ geeft
$3(2 + 4\lambda) - 7(3 + 5\lambda) = 8$
$6 + 12\lambda - 21 - 35\lambda = 8$
$-23\lambda = 23$
$\lambda = -1$
$\lambda = -1$ geeft $x = 2 + 4 \cdot -1 = -2$ en $y = 3 + 5 \cdot -1 = -2$
Dus $S(-2, -2)$.

45 Stel van de volgende lijnen een vergelijking op in de vorm $ax + by = c$.

a k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b l: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$

46 Stel van de volgende lijnen een vectorvoorstelling op.

a k: $x - 2y = -3$
b l: $4x + y = 0$

47 Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen.

a $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $l: 2x - 5y = 6$

b $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $n: 3x + 4y = 10$

48 **a** Stel een vergelijking op van de lijn l die evenwijdig is met de lijn $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ en die door het punt $A(4, 1)$ gaat.

b Stel een vergelijking op van de lijn n die loodrecht staat op de lijn $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ en die door het punt $B(5, -1)$ gaat.

49 **a** Stel een vectorvoorstelling op van de lijn l die evenwijdig is met de lijn $k: 2x - 3y = 10$ en die door het punt $A(5, 2)$ gaat.

b Stel een vectorvoorstelling op van de lijn n die loodrecht staat op de lijn $m: 4x + 5y = 6$ en die door het punt $B(1, -3)$ gaat.

A 50 **a** Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de lijnen $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

b De lijn m gaat door de punten $A(-3, 5)$ en $B(3, -1)$. De lijn n gaat door het punt $C(-4, -2)$ en staat loodrecht op de lijn $p: -x + 5y = 4$.
Bereken de coördinaten van het snijpunt T van m en n.

c Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen $q: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $r: x = 2t - 4 \wedge y = t - 6$.

A 51 **a** De lijn $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ snijdt de x-as in het punt A.
Stel een vergelijking op van de lijn l door A die loodrecht op k staat.

b Gegeven zijn de punten $B(2, 5)$ en $C(-1, 4)$.
Stel een vectorvoorstelling op van de lijn n door de oorsprong die evenwijdig is met de lijn m door de punten B en C.

c Stel een vergelijking op van de lijn p door $D(-4, 7)$ die loodrecht staat op de lijn door O en $E(1, -4)$.

A 52 Bereken de hoek tussen de lijnen.

a $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $l: 2x - 5y = 6$

b $m: 3x - 7y = 8$ en $n: x + 2y = 3$

c $p: y = 2x - 5$ en $q: y = -x + 4$

10

Terugblik

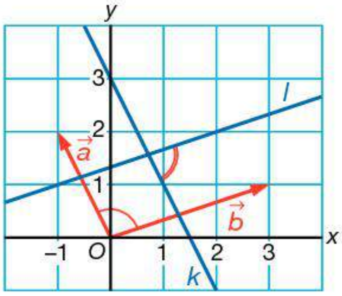
De hoek tussen twee vectoren

De hoek tussen de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ bereken je met

$\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Hierin is $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$ het inproduct van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

Bij $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ krijg je $\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \dfrac{-1 \cdot 3 + 2 \cdot 1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \dfrac{-1}{\sqrt{50}}$ en dit geeft $\angle(\vec{a}, \vec{b}) \approx 98{,}1°$.



In de figuur hiernaast is de lijn k met $\vec{r}_k = \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en de lijn l met $\vec{r}_l = \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ getekend. Voor de hoek tussen k en l krijg je $\cos(\angle(k, l)) = \dfrac{|-1|}{\sqrt{50}}$ en dit geeft $\angle(k, l) \approx 81{,}9°$.

Een normaalvector van een lijn

Is $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ dan is $\vec{a} \perp \vec{b}$ en omgekeerd, als $\vec{a} \perp \vec{b}$ dan is $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Een vector die loodrecht op $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ staat is $\begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$ immers $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix} = pq - pq = 0$.

Een normaalvector van een lijn is een vector die loodrecht op de lijn staat.

Een normaalvector van de lijn l: $ax + by = c$ is $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Met behulp van normaalvectoren is eenvoudig een vectorvoorstelling van een lijn om te zetten in een vergelijking en omgekeerd.

Je gebruikt dat de vectoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ loodrecht op elkaar staan.

Bij het opstellen van een vergelijking van de lijn k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ gebruik je dat $\vec{r}_k = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ en dus $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ en dat het punt $(5, 3)$ op k ligt.

Je krijgt k: $7x + 4y = c$ met $c = 7 \cdot 5 + 4 \cdot 3 = 47$, dus k: $7x + 4y = 47$.

Bij het opstellen van een vectorvoorstelling van de lijn l: $4x - 3y = 10$ gebruik je dat $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ en dus $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en dat het punt $(1, -2)$ op l ligt.

Je krijgt l: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

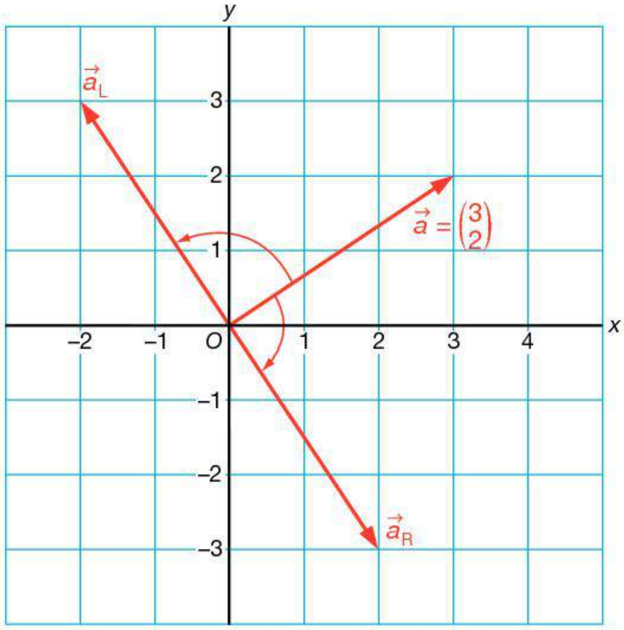
10.4 Vectoren en rotaties

O 53 In figuur 10.28 zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_R$ en $\vec{a}_L$ getekend.
De vector $\vec{a}_R$ ontstaat uit $\vec{a}$ door deze over 90° rechtsom te draaien en de vector $\vec{a}_L$ ontstaat uit $\vec{a}$ door deze over 90° linksom te draaien.

a Geef de kentallen van $\vec{a}_R$ en van $\vec{a}_L$.

De vector $\vec{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ wordt over 90° rechtsom gedraaid. Zo ontstaat $\vec{b}_R$.

b Geef de kentallen van $\vec{b}_R$.



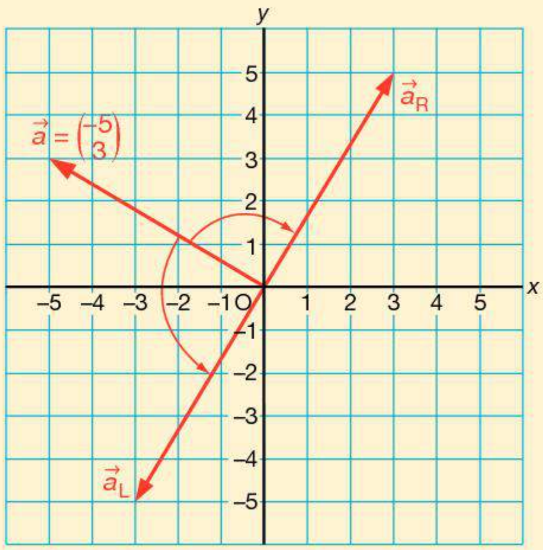
figuur 10.28

Theorie A Rotaties en coördinaten

In figuur 10.29 zie je de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_R$ en $\vec{a}_L$.

De vector $\vec{a}_R$ ontstaat uit $\vec{a}$ door deze over 90° rechtsom te draaien en de vector $\vec{a}_L$ ontstaat uit $\vec{a}$ door deze over 90° linksom te draaien.

Je ziet $\vec{a}_R = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ en $\vec{a}_L = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$.



figuur 10.29

$\vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ rechtsom draaien over 90° geeft $\vec{a}_R = \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ linksom draaien over 90° geeft $\vec{a}_L = \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix}$.

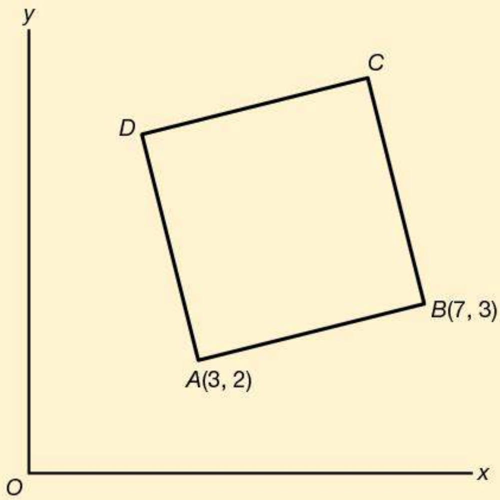
In figuur 10.30 is het vierkant $ABCD$ getekend met $A(3, 2)$ en $B(7, 3)$. Om de coördinaten van C te vinden bedenk je dat $\vec{c} = \vec{b} + \overrightarrow{BC} = \vec{b} + \overrightarrow{AD} = \vec{b} + \overrightarrow{AB}_L$.

Omdat $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ is $\overrightarrow{AB}_L = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Je krijgt $\vec{c} = \vec{b} + \overrightarrow{AB}_L = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$, dus $C(6, 7)$.

Om de coördinaten van D te vinden bedenk je dat $\vec{d} = \vec{a} + \overrightarrow{AB}_L$.

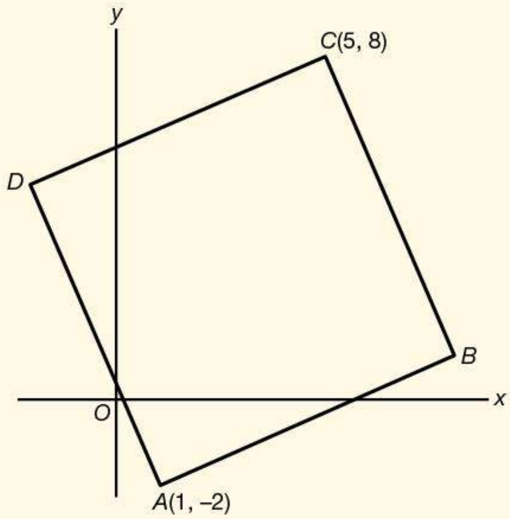
Dit geeft $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, dus $D(2, 6)$.



figuur 10.30

Voorbeeld

In figuur 10.31 is het vierkant $ABCD$ getekend met $A(1, -2)$ en $C(5, 8)$.
Bereken de coördinaten van B.



figuur 10.31

Aanpak
Bedenk dat $\vec{b} = \vec{m} + \overrightarrow{MB} = \vec{m} + \overrightarrow{AM}_R$ waarbij M het midden van AC is.

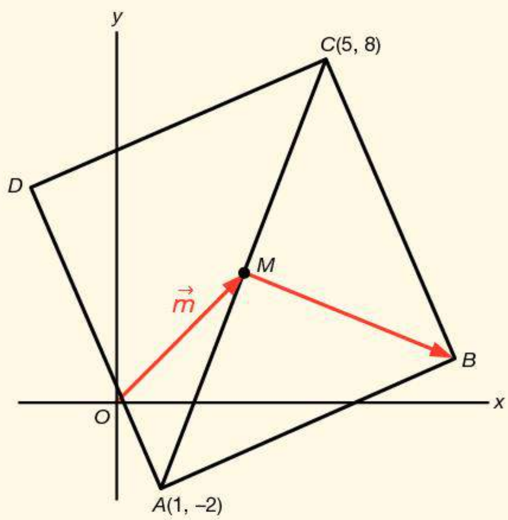
Uitwerking
M is het midden van AC.

$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{b} = \vec{m} + \overrightarrow{MB} = \vec{m} + \overrightarrow{AM}_R$

$\overrightarrow{AM} = \vec{m} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, dus $\overrightarrow{AM}_R = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

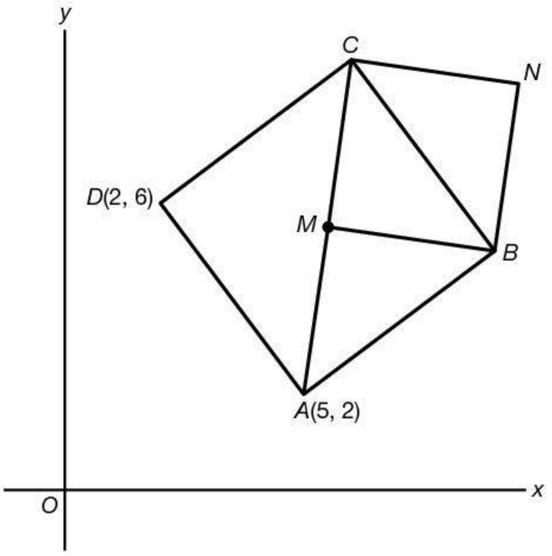
Dit geeft $\vec{b} = \vec{m} + \overrightarrow{AM}_R = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$, dus $B(8, 1)$.



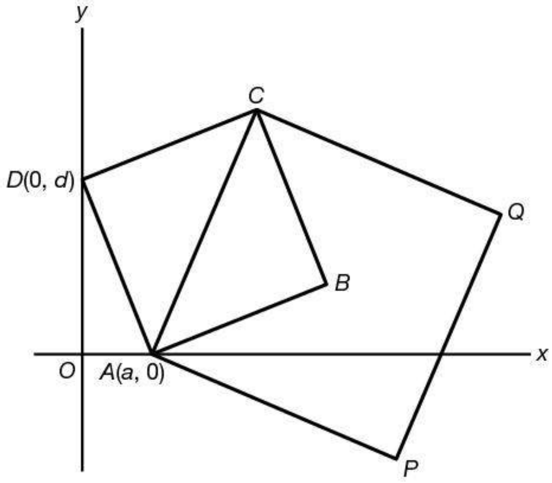
54 Zie het voorbeeld.
a Bereken de coördinaten van D.

Neem $A(p, q)$ en $C(r, s)$.
b Toon aan dat $B\left(\frac{1}{2}(p - q + r + s), \frac{1}{2}(p + q - r + s)\right)$.
c Druk de coördinaten van D uit in p, q, r en s.

55 Gegeven is het vierkant $ABCD$ met $A(5, 2)$ en $D(2, 6)$ in figuur 10.32.
Het punt M is het midden van AC.
Ook is het vierkant $MBNC$ getekend.
Bereken de coördinaten van N.



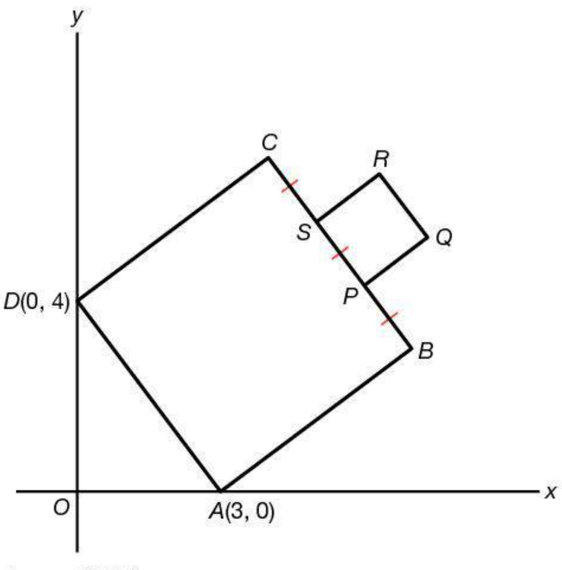
figuur 10.32



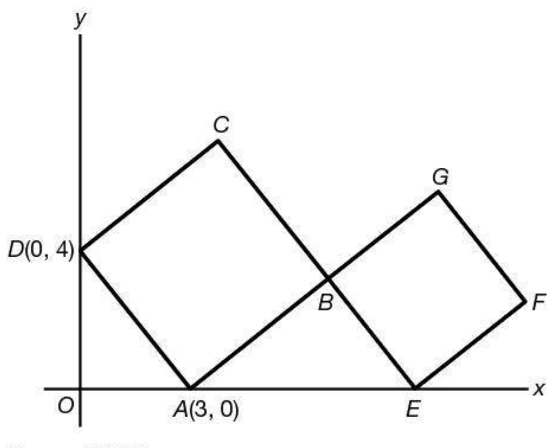
figuur 10.33

56 Gegeven is het vierkant $ABCD$ met $A(a, 0)$ en $D(0, d)$. Zie figuur 10.33.
Diagonaal AC is een zijde van het vierkant $APQC$.
Druk de coördinaten van P en Q uit in a en d.

57 Gegeven is het vierkant $ABCD$ met $A(3, 0)$ en $D(0, 4)$. Zie figuur 10.34.
Op BC liggen de punten P en S zo, dat $BP = PS = SC$.
PS is een zijde van het vierkant $PQRS$.
Bereken de coördinaten van de punten Q en R.



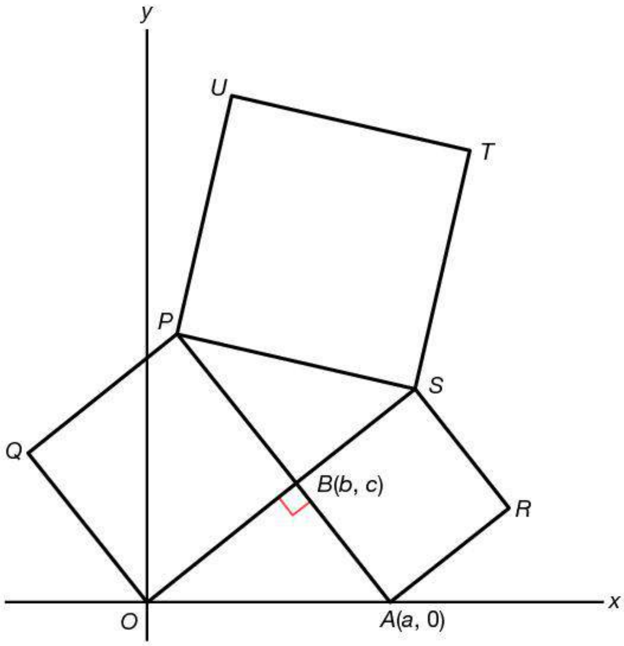
figuur 10.34



figuur 10.35

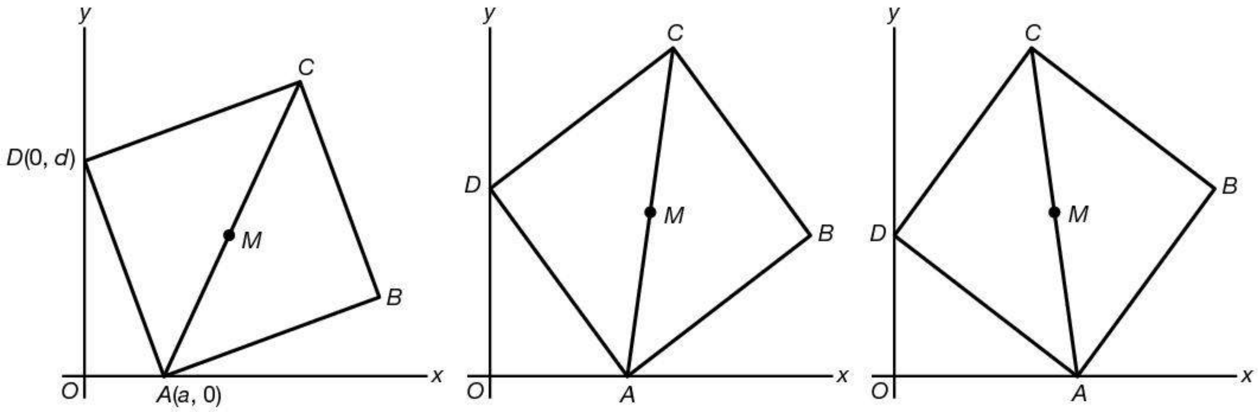
D 58 In figuur 10.35 is het vierkant $ABCD$ met $A(3, 0)$ en $D(0, 4)$ getekend. Het punt E ligt op het verlengde van CB en op de x-as.
BE is een zijde van het vierkant $BEFG$.
Bereken de coördinaten van F.

A 59 In figuur 10.36 is de rechthoekige driehoek OAB getekend met $\angle B = 90°$, $A(a, 0)$ en $B(b, c)$.
Op de zijden OB en AB zijn de vierkanten $OBPQ$ en $ABSR$ getekend.
PS is een zijde van het vierkant $PSTU$.
Druk de coördinaten van T en U uit in a, b en c.



figuur 10.36

A 60 Van het vierkant $ABCD$ beweegt het punt $A(a, 0)$ over de positieve x-as en het punt $D(0, d)$ over de positieve y-as. Daardoor verandert het midden M van AC van plaats.
In figuur 10.37 zie je enkele situaties.

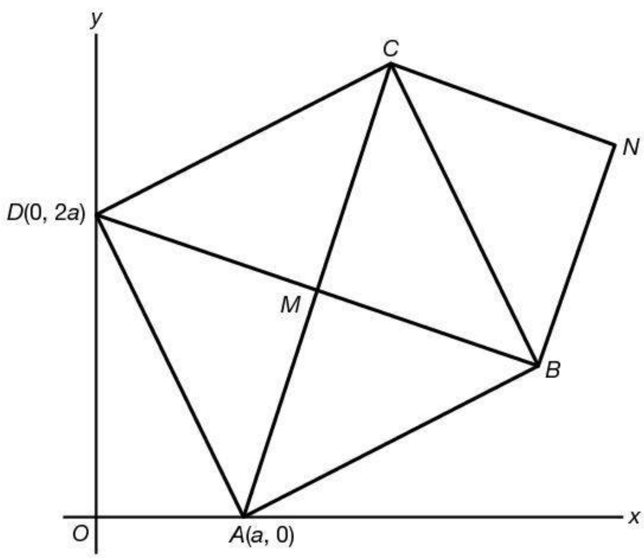


figuur 10.37

a Toon aan dat M over de lijn $y = x$ beweegt.
b Toon aan dat de lengte van het lijnstuk OM gelijk is aan $\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (a + d)$.

10

D 61 Van het vierkant $ABCD$ ligt het punt $A(a, 0)$ op de positieve x-as en het punt $D(0, 2a)$ op de positieve y-as. Het punt M is het snijpunt van de diagonalen van het vierkant $ABCD$.
BM is een zijde van het vierkant $BNCM$.
Zie figuur 10.38.
Voor elke waarde van a ligt het punt N op de lijn $y = mx$.
Bereken m.



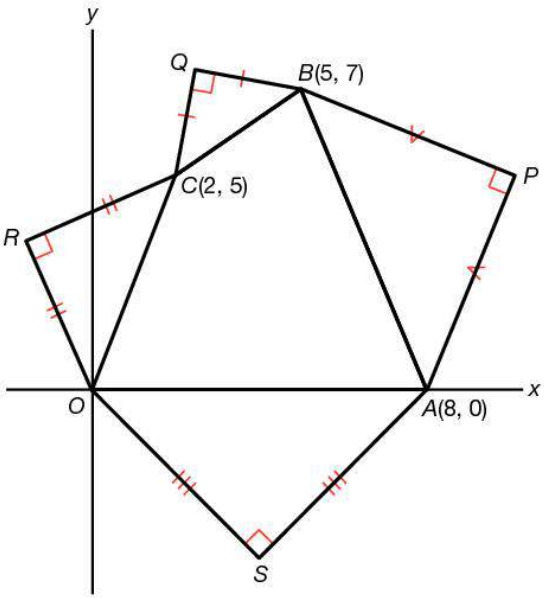
figuur 10.38

O 62 Gegeven is de vierhoek *OABC* met $A(8, 0)$, $B(5, 7)$ en $C(2, 5)$. Op elk van de zijden is een gelijkbenige rechthoekige driehoek getekend. Zie figuur 10.39.

Er geldt $\vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}_{\text{R}}$.

a Licht dit toe en bereken de coördinaten van het punt *P*.

b Bereken de coördinaten van het punt *R*.



figuur 10.39

Theorie B Rotaties en loodrechte stand

In figuur 10.40 is nog eens de vierhoek van opgave 62 getekend. Om de coördinaten van het punt *Q* te berekenen bedenk je dat $\vec{q} = \vec{m} + \overrightarrow{MQ}$. Hierbij is *M* het midden van *BC*, dus $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$. Omdat $MQ = MC$ en $MQ \perp MC$ is $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{CM}_{\text{L}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}_{\text{L}}$.

Omdat $\overrightarrow{CB} = \vec{b} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ is $\overrightarrow{CB}_{\text{L}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Zo krijg je

$$\vec{q} = \tfrac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right) + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} \\ 7\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ dus}$$

het punt *Q* is $\left(2\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}\right)$.

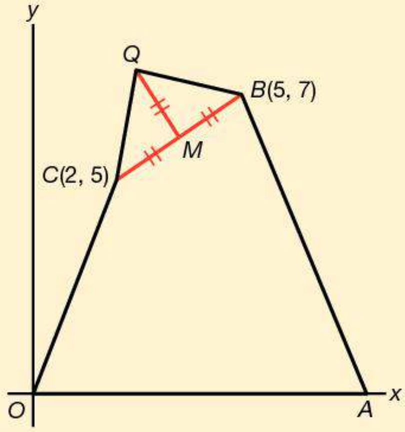
In opgave 62 heb je gevonden dat $P(10, 5)$ en $R\left(-1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$ is. Verder kun je nagaan dat $S(4, -4)$ is.

Zo krijg je $\overrightarrow{PR} = \vec{r} - \vec{p} = \begin{pmatrix} -1\frac{1}{2} \\ 3\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11\frac{1}{2} \\ -1\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ en

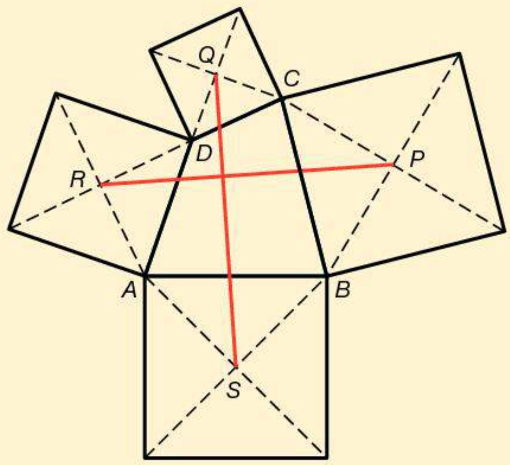
$\overrightarrow{QS} = \vec{s} - \vec{q} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} \\ 7\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ -11\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Hieruit volgt dat $PR \perp QS$ en $PR = QS$.

Dat in figuur 10.41 in het algemeen geldt dat $PR \perp QS$ en $PR = QS$ staat bekend als de stelling van Van Aubel. Hierboven is deze stelling bewezen voor een concrete situatie. In opgave 66 mag je proberen het algemene bewijs te geven.
In de volgende opgaven geef je ook steeds een algemeen bewijs, dus niet met getallen maar met letters.

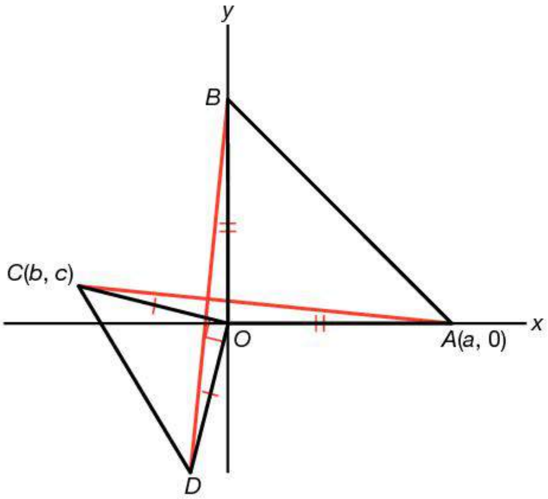


figuur 10.40

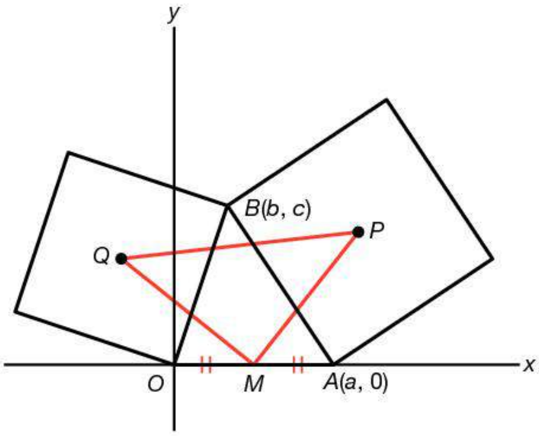


figuur 10.41 De vierhoek van Aubel.

63 Gegeven zijn de gelijkbenige rechthoekige driehoeken OAB en OCD. Zie figuur 10.42.
Bewijs dat $AC = BD$ en $AC \perp BD$.



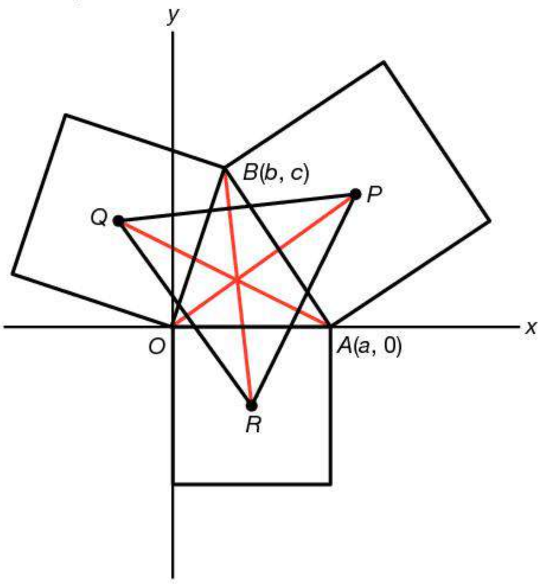
figuur 10.42



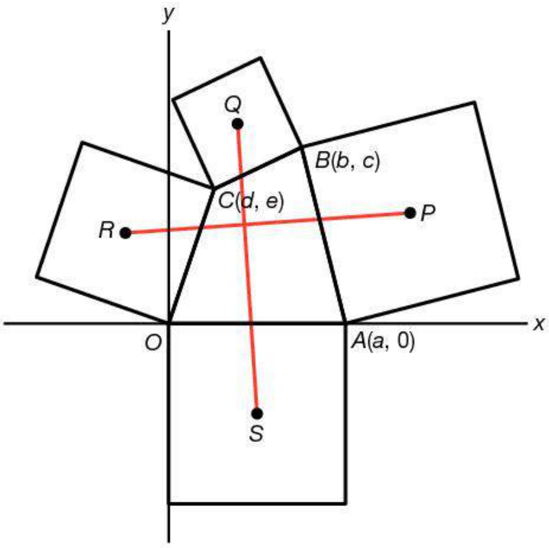
figuur 10.43

64 Op de zijden AB en OB van driehoek OAB worden vierkanten geplaatst. De middelpunten van deze vierkanten zijn P en Q.
Het punt M is het midden van OA. Zie figuur 10.43.
Bewijs dat driehoek PQM een gelijkbenige rechthoekige driehoek is.

A 65 Op de zijden van de driehoek OAB worden vierkanten geplaatst.
De middelpunten van deze vierkanten zijn P, Q en R. Zie figuur 10.44.
Bewijs dat $OP \perp QR$, $AQ \perp PR$ en $BR \perp PQ$.



figuur 10.44



figuur 10.45

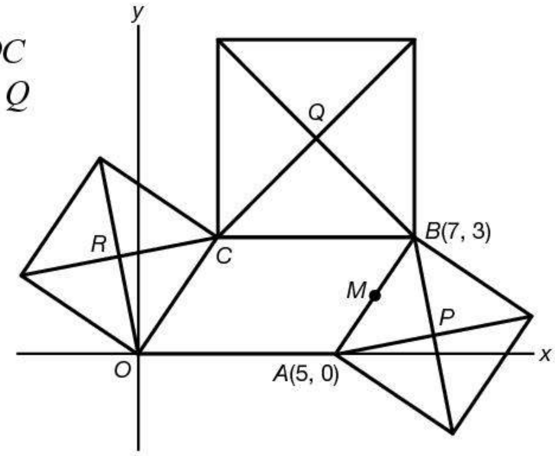
D 66 Op de zijden van vierhoek $OABC$ zijn vierkanten geplaatst. De middens van de vierkanten zijn P, Q, R en S. Zie figuur 10.45.
Bewijs de stelling van Van Aubel die zegt dat $PR = QS$ en $PR \perp QS$.

Terugblik

Rotaties en coördinaten

Draai je de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ rechtsom over 90° dan krijg je de vector $\vec{a}_{\mathrm{R}} = \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$.

Bij linksom draaien van $\vec{a}$ over 90° krijg je de vector $\vec{a}_{\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix}$.



In de figuur hiernaast is het parallellogram $OABC$ met $A(5, 0)$ en $B(7, 3)$ getekend. Op de zijden AB, BC en OC zijn vierkanten geplaatst, waarvan de middelpunten P, Q en R zijn.
Om de coördinaten van P te berekenen gebruik je

$\vec{p} = \vec{m} + \overrightarrow{MP}$ waarbij M het midden van AB is.

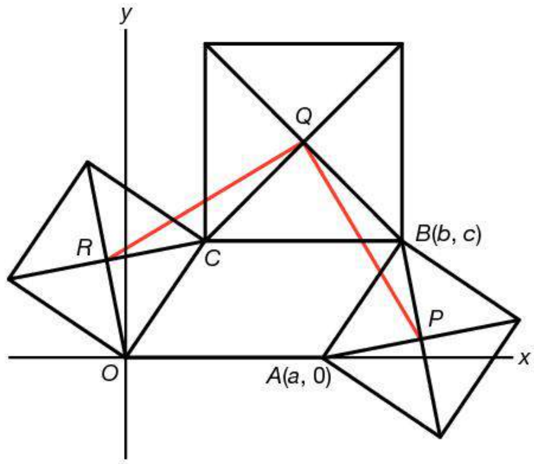
Omdat $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ en $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AM}_{\mathrm{R}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}_{\mathrm{R}}$ krijg je

$\vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}_{\mathrm{R}}$.

$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, dus $\overrightarrow{AB}_R = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Dit geeft $\vec{p} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}\right) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, dus $P\left(7\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Rotaties en bewijzen



Om bij de figuur hiernaast te bewijzen dat $PQ = QR$ en $PQ \perp QR$ ga je als volgt te werk.
Gebruik dat $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ c \end{pmatrix}$.

Je krijgt $\vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c \\ a-b \end{pmatrix} =$

$\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}\right) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c \\ a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}c \\ \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \end{pmatrix} =$

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+b+c \\ a-b+c \end{pmatrix}$.

Op dezelfde manier krijg je $\vec{q} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a + b \\ \frac{1}{2}a + c \end{pmatrix}$ en

$\vec{r} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -a+b-c \\ -a+b+c \end{pmatrix}$.

Dit geeft $\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p} = \begin{pmatrix} -a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \\ \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c \end{pmatrix}$ en

$\overrightarrow{QR} = \vec{r} - \vec{q} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \\ -a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \end{pmatrix}$ en hieraan is te zien dat $PQ = QR$ en $PQ \perp QR$.

10.5 Bewegingen met GeoGebra

In deze paragraaf ga je met behulp van het computerprogramma GeoGebra bewegingen bestuderen in het platte vlak.

O 67 Het bestand dat je in deze opgave maakt heb je bij de volgende opgaven weer nodig. Denk eraan om aan het eind van deze opgave je werk op te slaan.

a Maak met Schuifknop de variabele t aan, waarvan de waarde varieert van −5 tot 5 met stapgrootte 0,01.

b Voer in de invoerregel de functies $f(t) = 3t - t^3$ en $g(t) = t^2 - 4$ in. Klik rechts op deze functies en zet de optie object tonen uit.

c Geef de opdracht Kromme(f(t),g(t),t,−5,5).

Je krijgt de eerste afgeleide door één keer en de tweede afgeleide door twee keer op de knop met het accent te drukken.

d Voer de punten A = (f(t),g(t)), B = (f′(t),g′(t)) en C = (f″(t),g″(t)) in.

Met het optellen van punten in GeoGebra tel je de overeenkomstige coördinaten bij elkaar op. Dus D = A + B betekent $x_D = x_A + x_B$ en $y_D = y_A + y_B$.

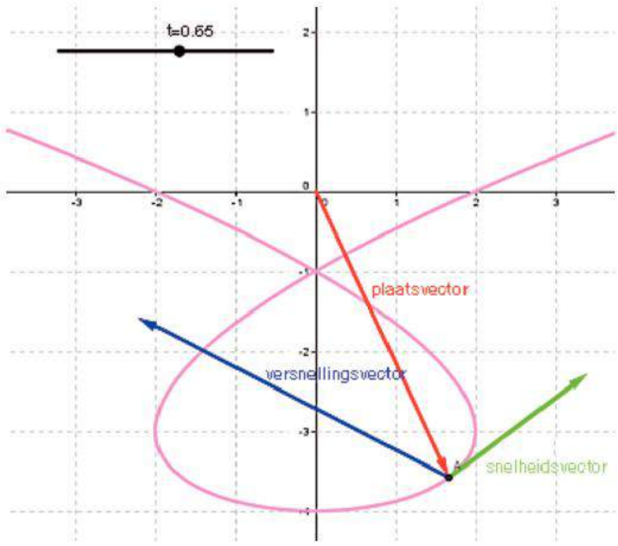
e Voer de punten D = A + B en E = A + C in.

f Geef de opdrachten plaatsvector = vector(O,A), snelheidsvector = vector(A,D) en versnellingsvector = vector(A,E).

g Zet object tonen uit voor de punten B, C, D en E.

h Geef de kromme en de vectoren een mooie kleur en maak ze iets dikker. Zie de figuur hiernaast. Sla je werk op.

i Zet bij de eigenschappen van t bij het tabblad schuifknop de animatiesnelheid op 1 en herhaal op toenemen. Zet de animatie voor de variabele t aan en bekijk het resultaat.



figuur 10.46

Theorie A Bewegingen

In opgave 67 heb je gezien dat het punt $A(f(t), g(t))$ over een kromme lijn in het platte vlak beweegt als de waarde van t verandert. Zo'n beweging ontstaat als op een voorwerp een veranderlijke kracht wordt uitgeoefend.
Volgens de tweede wet van Newton is $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$.

Uit de tweede wet van Newton volgt dat de versnelling $\vec{a}$ een vector is die dezelfde richting heeft als de kracht die het voorwerp laat bewegen.
Bij bewegingen zijn snelheid en versnelling vectoren. In opgave 67 heb je deze vectoren zichtbaar gemaakt.
De snelheidsvector v geeft de richting en de grootte van de snelheid waarmee het punt beweegt, de versnellingsvector a geeft de richting van de kracht die de beweging veroorzaakt.
Ga bij de opgaven steeds uit van het bestand dat je in opgave 67 hebt gemaakt en voer zo nodig voor $f(t)$ en $g(t)$ de nieuwe formules van $x(t)$ en $y(t)$ in de invoerregel in.

68 De baan van een punt P wordt gegeven door $\begin{cases} x(t) = t^2 + 2t \\ y(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t \end{cases}$

a Voor welke t snijdt de baan de y-as?
b In welke punten is de snelheidsvector horizontaal?
c In welk punt is de snelheidsvector verticaal?
d Voor welke t staat de snelheidsvector loodrecht op de versnellingsvector?

De baan snijdt zichzelf in het punt A.
e Geef de coördinaten van A en de bijbehorende waarden van t.

De snelheid waarmee P beweegt neemt toe als de hoek tussen de snelheidsvector en de versnellingsvector kleiner is dan 90°. Is deze hoek groter dan 90° dan neemt de snelheid af.
f Licht dit toe en gebruik dit om het punt te vinden waar de snelheid waarmee P beweegt het kleinst is.

69 De baan van een punt P wordt gegeven door $\begin{cases} x(t) = 3t - t^3 \\ y(t) = t^2 - 4 \end{cases}$

Met de opdracht abs(snelheidsvector) berekent GeoGebra de lengte van de snelheidsvector en zet deze lengte als getal in het algebravenster.
a Geef de minimale lengte van de snelheidsvector.
b Geef de minimale lengte van de versnellingsvector.

Met de opdrachten d=(1,0) en Hoek[snelheidsvector,d] geeft GeoGebra een hoek tussen de snelheidsvector en de x-as.
c Geef in graden nauwkeurig de hoek waaronder de baan de x-as snijdt. Let op dat de gevraagde hoek tussen 0° en 90° ligt.
d Geef in graden nauwkeurig de hoek waaronder de baan zichzelf snijdt.

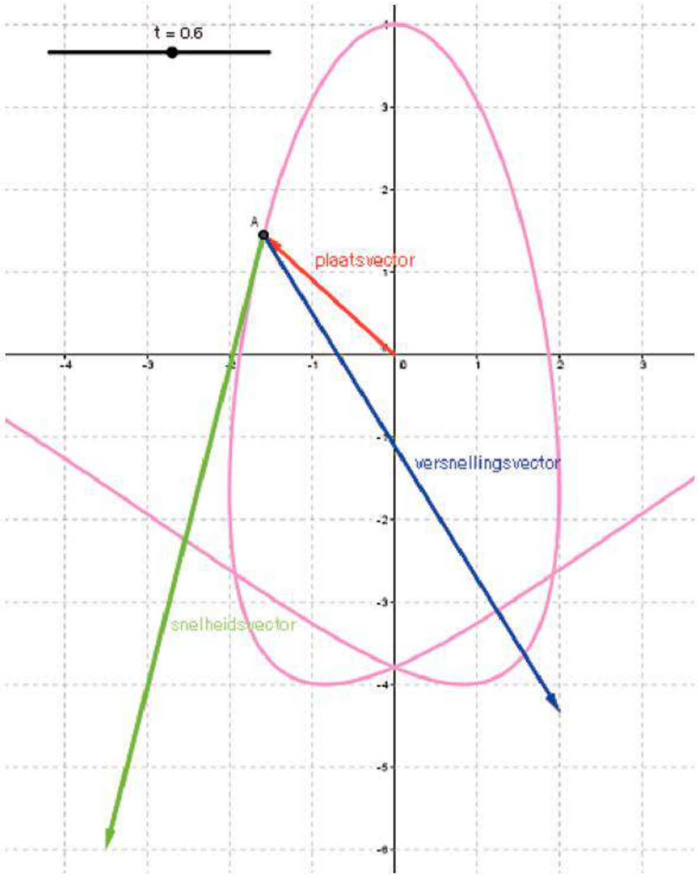
10

70 De baan van een punt P wordt gegeven door $\begin{cases} x(t) = t^3 - 3t \\ y(t) = 4\cos(2t) \end{cases}$

a In welke punten snijdt de baan de y-as? Rond zo nodig af op twee decimalen.

b De baan heeft twee buigpunten waar de lengte van de versnellingsvector niet gelijk is aan nul.
Wat kun je zeggen van de hoek tussen de snelheidsvector en de versnellingsvector in deze punten?

c In welke punten is de snelheidsvector evenwijdig aan de y-as? Hoe groot is de snelheidsvector in deze punten?



figuur 10.47

71 De baan van een punt P wordt gegeven door
$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}t^3 - t \\ y(t) = (t^2 - 4)\ln(t + 3) \end{cases}$

a Geef de exacte plaats- en snelheidsvector van P voor $t = -2$.
Licht toe dat de baan van P de x-as raakt.

b In welke punten staan de snelheids- en de versnellingsvector loodrecht op elkaar?
Wat weet je van de grootte van de snelheidsvector in deze punten?

c Geef de formule van de verticale asymptoot van de baan.
Licht je antwoord toe.

10

10.6 Snelheid en versnelling

O 72 De baan van een punt P is gegeven door $\begin{cases} x(t) = t^2 - 4t \\ y(t) = 2t - 6 \end{cases}$

Hierin is t de tijd.
Op $t = 0$ is P in het punt $(0, -6)$.

a Licht dit toe.
b Vul de tabel in en teken de baan van P.

t	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
x			0						
y			−6						

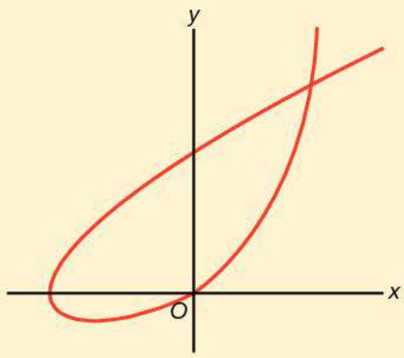
c Bereken de vector die de verplaatsing geeft van P op het interval $[2, 3]$.

Theorie A Snelheid bij bewegingen

De baan van een punt P wordt gegeven door de

bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t \\ y(t) = t^2 - 2t \end{cases}$

Hierin is t de tijd.
In de figuur hiernaast zie je de baan van P.
De bewegingsvergelijkingen vormen de **parametervoorstelling van de baan** van P. De baan wordt daarom ook wel een **parameterkromme** genoemd.



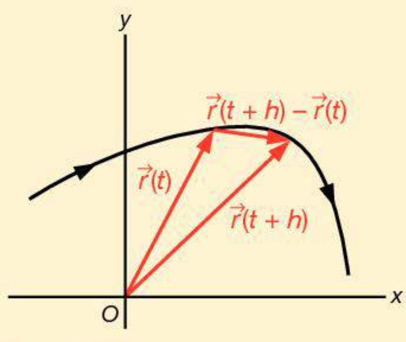
figuur 10.48

In het algemeen hebben bewegingsvergelijkingen de vorm
$\begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \end{cases}$
Bewegingsvergelijkingen worden ook wel met vectoren genoteerd.

De vector $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ heet de **plaatsvector** van P en wordt genoteerd als $\vec{r}(t)$. De plaatsvector is dus de vector die vanuit O het punt P aanwijst.

Op het interval $[t, t+h]$ is het punt P verplaatst over de vector $\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)$. Zie figuur 10.49.

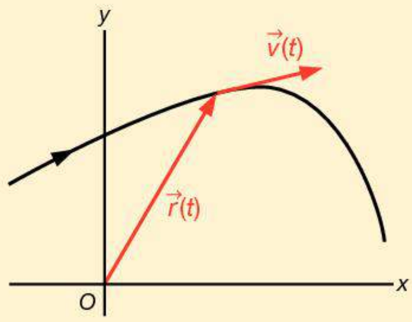
Om de snelheid van P op het tijdstip t te vinden, berekenen we $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}$.



figuur 10.49

$$\lim_{h\to 0}\frac{\vec{r}(t+h)-\vec{r}(t)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\begin{pmatrix}x(t+h)\\y(t+h)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\begin{pmatrix}x(t+h)-x(t)\\y(t+h)-y(t)\end{pmatrix}=$$

$$\lim_{h\to 0}\begin{pmatrix}\dfrac{x(t+h)-x(t)}{h}\\[2ex]\dfrac{y(t+h)-y(t)}{h}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\end{pmatrix}$$



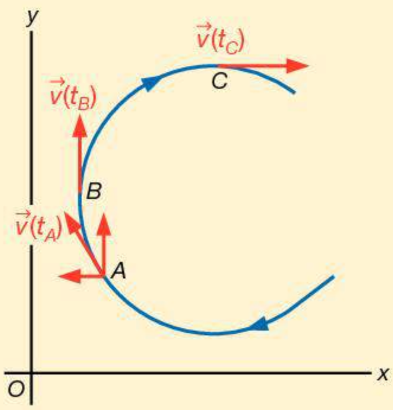
figuur 10.50

De vector $\vec{v}(t)=\begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\end{pmatrix}$ heet de **snelheidsvector** van P.

De snelheidsvector is een richtingsvector van de raaklijn aan de baan op het tijdstip t. De lengte van de snelheidsvector is de **baansnelheid** van P op het tijdstip t.

Bij de plaatsvector $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$ van een punt P hoort de snelheidsvector $\vec{v}(t)=\begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\end{pmatrix}$.

De baansnelheid van P is $|\vec{v}(t)|=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}$.

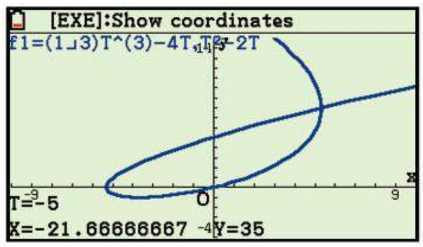


figuur 10.51

In de figuur hiernaast beweegt een punt P over een kromme door de punten A, B en C.

In het punt B is de raaklijn verticaal dus is $\vec{v}(t_B)=\begin{pmatrix}0\\y'(t_B)\end{pmatrix}$, dat wil zeggen $x'(t_B)=0\wedge y'(t_B)\neq 0$. In het punt C is de raaklijn horizontaal dus is $\vec{v}(t_C)=\begin{pmatrix}x'(t_C)\\0\end{pmatrix}$.

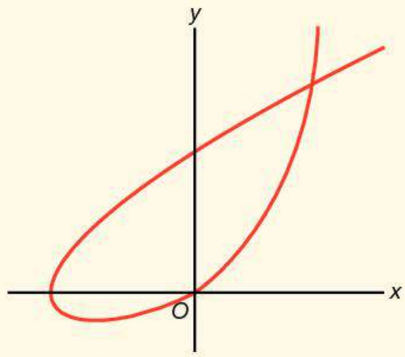
Informatief Banen plotten met de GR



Op de GR kun je een parametervoorstelling invoeren en de baan plotten. Je krijgt dan de parameterkromme.
Om zo'n kromme te plotten geef je behalve Xmin, Xmax, Ymin en Ymax ook Tmin, Tmax en Tstep op. Bij de kromme die gegeven is door $x(t)=\frac{1}{3}t^3-4t\wedge y(t)=t^2-2t$ neem je bijvoorbeeld Tmin = −5, Tmax = 5, Tstep = 0.1, Xmin = −10, Xmax = 10, Ymin = −5 en Ymax = 15. De variabele t voer je in met dezelfde toets als waarmee je de variabele x invoert.
Om met parametervoorstellingen te werken op de TI kies je in het MODE-menu in plaats van FUNC (of FUNCTION) voor PAR (of PARAMETRIC).
Op de Casio kies je in het Graph-menu bij TYPE voor Param. De stapgrootte voer je in bij Tθptch.

Voorbeeld

De beweging van een punt P wordt beschreven door de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t \\ y(t) = t^2 - 2t \end{cases}$



figuur 10.52

a Bereken de coördinaten van het punt van de baan waarin de raaklijn evenwijdig aan de x-as is.
b Stel een vergelijking op van de lijn k die de baan van P raakt in het punt met $t = 3$.
c Bereken in drie decimalen nauwkeurig de minimale baansnelheid van P.

Uitwerking

a $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t$ geeft $x'(t) = t^2 - 4$
$y(t) = t^2 - 2t$ geeft $y'(t) = 2t - 2$
Evenwijdig aan de x-as, dus $y'(t) = 0 \wedge x'(t) \neq 0$.
Dus $2t - 2 = 0 \wedge t^2 - 4 \neq 0$
$2t = 2 \wedge t^2 \neq 4$
$t = 1 \wedge t \neq 2 \wedge t \neq -2$
Dus $t = 1$ en dit geeft het punt $\left(-3\frac{2}{3}, -1\right)$.

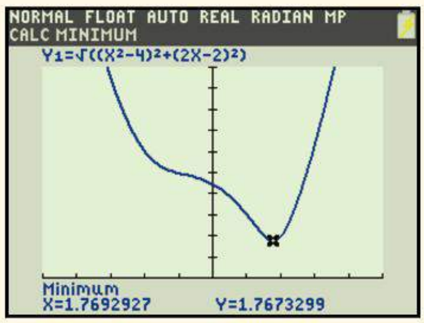
b Stel k: $ax + by = c$.

$$\vec{r}_k = \begin{pmatrix} x'(3) \\ y'(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-4 \\ 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ dus } \vec{n}_k = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

$$\left.\begin{array}{l} k\colon 4x - 5y = c \\ t = 3 \text{ geeft het punt } (-3, 3) \end{array}\right\} c = 4 \cdot -3 - 5 \cdot 3 = -27$$

Dus k: $4x - 5y = -27$.

c $|\vec{v}(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{(t^2-4)^2 + (2t-2)^2}$
Voer in $y_1 = \sqrt{(x^2-4)^2 + (2x-2)^2}$.
De optie minimum geeft $x = 1{,}7692...$ en $y = 1{,}7673...$



Dus de minimale baansnelheid is 1,767.

10

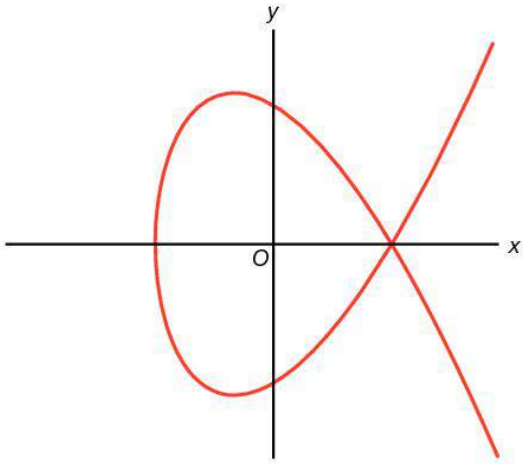
73 Zie het voorbeeld met de bewegingsvergelijkingen
$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t \\ y(t) = t^2 - 2t \end{cases}$

a Er zijn twee punten op de baan waarin de raaklijn evenwijdig is aan de y-as.
Bereken de coördinaten van deze punten.
b De baan van P gaat door de oorsprong.
Stel een vergelijking op van de lijn l die de baan raakt in de oorsprong.

74 Zie het voorbeeld met de bewegingsvergelijkingen
$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t \\ y(t) = t^2 - 2t \end{cases}$$
Om te berekenen voor welke t het punt P zowel naar links als omhoog beweegt, los je de gecombineerde ongelijkheid $t^2 - 4 < 0 \wedge 2t - 2 > 0$.

a Licht dit toe.
b Los de gecombineerde ongelijkheid op.

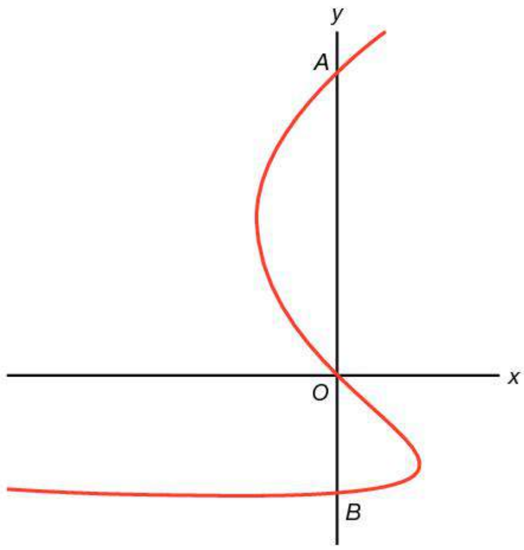
75 De beweging van een punt P wordt beschreven door de bewegingsvergelijkingen
$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 2 \\ y(t) = t^3 - 4t \end{cases}$$
a Bereken de coördinaten van de punten van de baan waarin de raaklijn evenwijdig aan de x-as is.
b Bereken exact de snelheid van P op $t = -1$.
c Bereken exact voor welke t het punt P zowel naar rechts als omlaag beweegt.
d Toon aan dat de baan zichzelf snijdt in het punt (2, 0) en bereken de hoek φ waaronder dit gebeurt. Geef je antwoord in graden in één decimaal nauwkeurig.



figuur 10.53

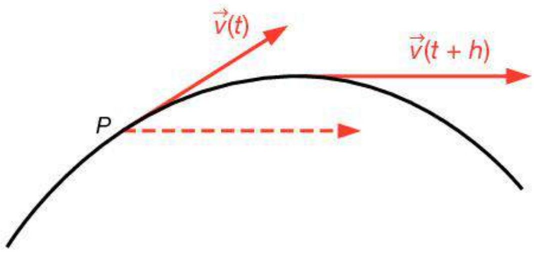
76 De beweging van een punt P wordt beschreven door de bewegingsvergelijkingen
$$\begin{cases} x(t) = 2t - \frac{1}{6}t^3 \\ y(t) = \frac{1}{4}t^2 - 2t \end{cases}$$
De baan snijdt de y-as behalve in O ook in de punten A en B. Zie figuur 10.54.

a Bereken exact de afstand tussen de punten A en B.
b Bereken de coördinaten van de punten waarin de raaklijn evenwijdig is aan de x-as of aan de y-as.
c Bereken de baansnelheid van P in de oorsprong.
d Bereken in twee decimalen nauwkeurig de minimale snelheid van P.



figuur 10.54

O 77 In de figuur hiernaast zie je de baan van een bewegend punt en de snelheidsvectoren op de tijdstippen t en $t + h$.
Neem de figuur over en teken de verschilvector $\vec{v}(t+h) - \vec{v}(t)$. Verplaats hiertoe $\vec{v}(t+h)$ naar P.



figuur 10.55

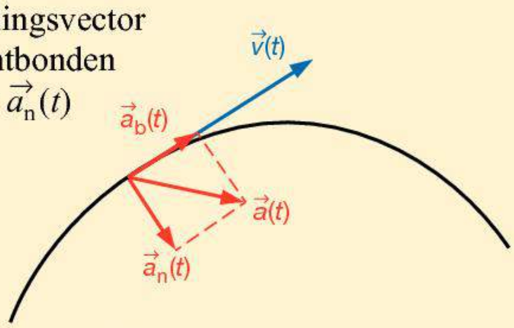
10

Theorie B Versnelling bij bewegingen

In opgave 77 heb je te maken met een beweging waarvan de snelheidsvector verandert. De **versnellingsvector** $\vec{a}$ is de afgeleide van de snelheidsvector, dus

$$\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{v}(t+h) - \vec{v}(t)}{h} = \left[\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}\right]' = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}.$$

In figuur 10.56 is zowel de snelheidsvector als de versnellingsvector op het tijdstip t getekend. De versnellingsvector $\vec{a}(t)$ is ontbonden in de componenten $\vec{a}_n(t)$ en $\vec{a}_b(t)$. De lengte van de vector $\vec{a}_n(t)$ heeft te maken met de kromming van de baan. De lengte van de vector $\vec{a}_b(t)$ geeft de grootte van de **baanversnelling** van het punt P. In het geval $\vec{a}_b(t)$ en $\vec{v}(t)$ dezelfde richting hebben is de baanversnelling positief. In het geval $\vec{a}_b(t)$ en $\vec{v}(t)$ tegengestelde richting hebben is de baanversnelling negatief. De baanversnelling is te berekenen met $a_b(t) = \dfrac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{|\vec{v}(t)|}$.



figuur 10.56

In opgave 79 bewijs je dit voor een positieve baanversnelling. In de situatie dat de baanversnelling negatief is geldt een soortgelijk bewijs.

Bij de plaatsvector $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ van een punt P hoort de versnellingsvector $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$ en de baanversnelling $a_b(t) = \dfrac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{|\vec{v}(t)|}$.

Voorbeeld

De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn gegeven door $\begin{cases} x(t) = t^2 - 1 \\ y(t) = \frac{1}{4}t^4 - 2t \end{cases}$

a Druk de baanversnelling $a_b(t)$ uit in t.
b Bereken de baanversnelling op $t = 1$.

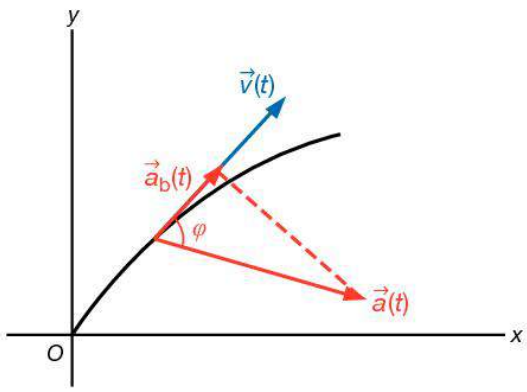
Uitwerking

a $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ \frac{1}{4}t^4 - 2t \end{pmatrix}$ geeft $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t^3 - 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3t^2 \end{pmatrix}$.

$$a_b(t) = \frac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{|\vec{v}(t)|} = \frac{\begin{pmatrix} 2t \\ t^3 - 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3t^2 \end{pmatrix}}{\sqrt{(2t)^2 + (t^3 - 2)^2}} = \frac{4t + 3t^5 - 6t^2}{\sqrt{4t^2 + t^6 - 4t^3 + 4}} = \frac{3t^5 - 6t^2 + 4t}{\sqrt{t^6 - 4t^3 + 4t^2 + 4}}$$

b $a_b(1) = \dfrac{3 - 6 + 4}{\sqrt{1 - 4 + 4 + 4}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{5}$

R 78 Zie het voorbeeld.
De baanversnelling op $t = 1$ is ook te berekenen zonder eerst de formule van $a_b(t)$ op te stellen.
Doe dit.

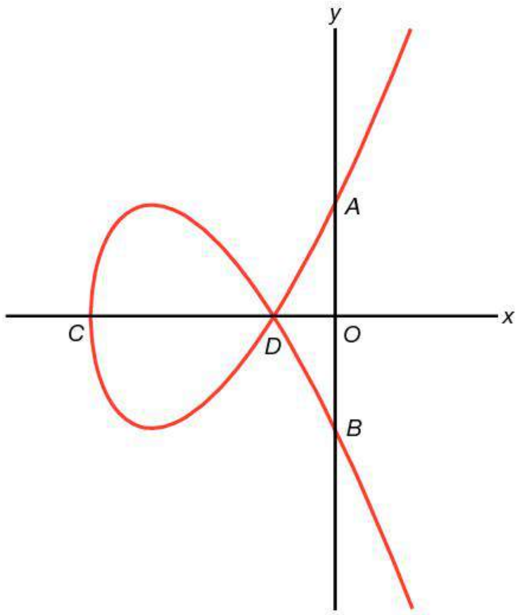


figuur 10.57

79 Bewijs de formule $a_b(t) = \dfrac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{|\vec{v}(t)|}$ voor de situatie waarbij de baanversnelling positief is.
Gebruik figuur 10.57.

80 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn gegeven door $\begin{cases} x(t) = t^2 - 4 \\ y(t) = t^3 - 3t \end{cases}$
De baan snijdt de y-as in de punten A en B en de x-as in de punten C en D. Zie figuur 10.58.

a Onderzoek in welke volgorde de punten A, B, C en D worden doorlopen.
b Druk de baanversnelling $a_b(t)$ uit in t.
c Bereken exact de baansnelheid en de baanversnelling van P in het punt A.
d Bereken exact de baansnelheid in de punten waarin de baanversnelling nul is.
e Bereken in drie decimalen nauwkeurig de minimale baansnelheid van P.
f De baan snijdt zichzelf in het punt $D(-1, 0)$. Toon dit aan en bereken de hoek φ waaronder dit gebeurt.



figuur 10.58

Geschiedenis Het ontstaan van de vectormeetkunde

De vectormeetkunde is in de eerste helft van de 19e eeuw ontstaan. Daarvoor werden er echter ook al problemen met vectoren opgelost. Zo kwam Newton in 1687 met het idee om krachten op te tellen via de parallellogramconstructie. Daarnaast bleken vectoren een praktisch hulpmiddel om complexe getallen meetkundig weer te geven. Diverse wiskundigen opperden hier aan het eind van de 18e eeuw ideeën voor, maar die werden pas serieus genomen toen Gauss er in 1831 een publicatie aan wijdde.
De briljante Ierse wis- en natuurkundige William Rowan Hamilton (1804–1865) werkte de principes van Gauss succesvol uit. Als kleine jongen sprak Hamilton liefst dertien talen. Zijn interesse verschoof echter geleidelijk naar de exacte vakken nadat hij op achtjarige leeftijd kennismaakte met het Amerikaanse rekenwonder Zerah Colburn. Als jonge twintiger publiceerde Hamilton al opvallende resultaten in de optica. In zijn verdere carrière werkte hij de vectormeetkunde uit tot een volwaardig systeem. In een publicatie uit 1846 gebruikte hij voor het eerst het woord vector.

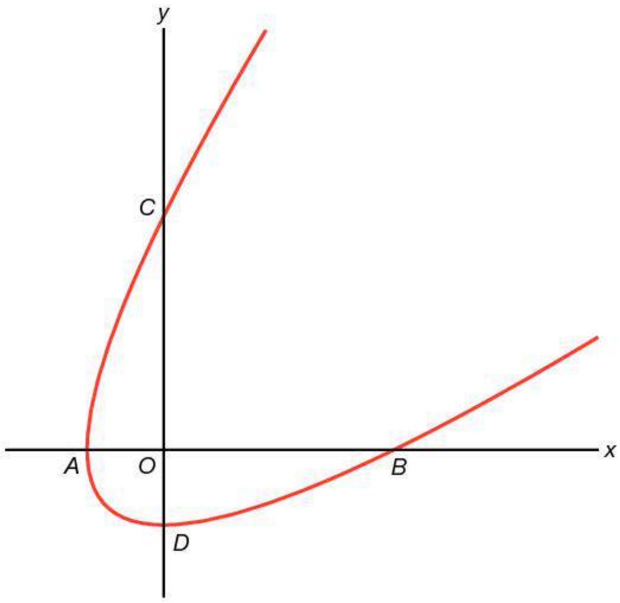

William Rowan Hamilton

81 De baan van een punt P is gegeven door de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2 \\ y(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2t \end{cases}$$

De baan snijdt de x-as in de punten A en B en de y-as in de punten C en D. Zie figuur 10.59.

a Onderzoek in welke volgorde de punten A, B, C en D worden doorlopen.
b Druk de baanversnelling $a_b(t)$ uit in t.
c Bereken in welk punt van de baan de versnellingsvector loodrecht staat op de snelheidsvector.
d Bereken exact de minimale baansnelheid van P.
e Toon aan dat P de x-as in het punt B met dezelfde baansnelheid passeert als de y-as in het punt C.
f De lijn k raakt de baan in het punt $E\left(-1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right)$. Stel een vergelijking op van k.



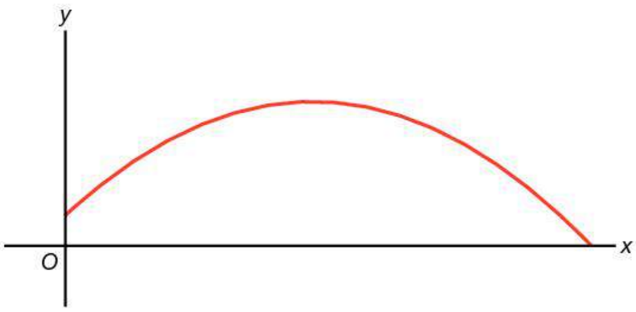
figuur 10.59

82 Bij het onderdeel speerwerpen in de atletiek wordt na een aanloop een speer zo ver mogelijk weggeworpen.
In deze opgave bekijken we het volgende model van de baan van de punt van een speer.

$$\begin{cases} x(t) = 25t \\ y(t) = -5t^2 + 15t + 3 \end{cases}$$

Hierbij zijn $x(t)$ en $y(t)$ in meter en is t de tijd in seconden.
$x(t)$ en $y(t)$ geven de plaats van de punt van de speer t seconden nadat de speer de hand van de werper heeft verlaten.

a Bereken in m/s in één decimaal nauwkeurig de baansnelheid waarmee de speer wordt weggeworpen.
b Bereken in graden nauwkeurig de hoek φ van de baan waaronder de speer wordt weggeworpen.
c Wat is de maximale hoogte die de speer bereikt?
d Hoe ver van de afworplijn komt de speer neer? Neem aan dat de punt van de speer drie meter voor de afworplijn is op het moment dat de speer wordt losgelaten. Geef het antwoord in dm nauwkeurig.
e Bereken de versnellingsvector. Wat stelt deze versnellingsvector voor?



figuur 10.60

10

A 83 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn gegeven door $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t \\ y(t) = t^2 - 4 \end{cases}$

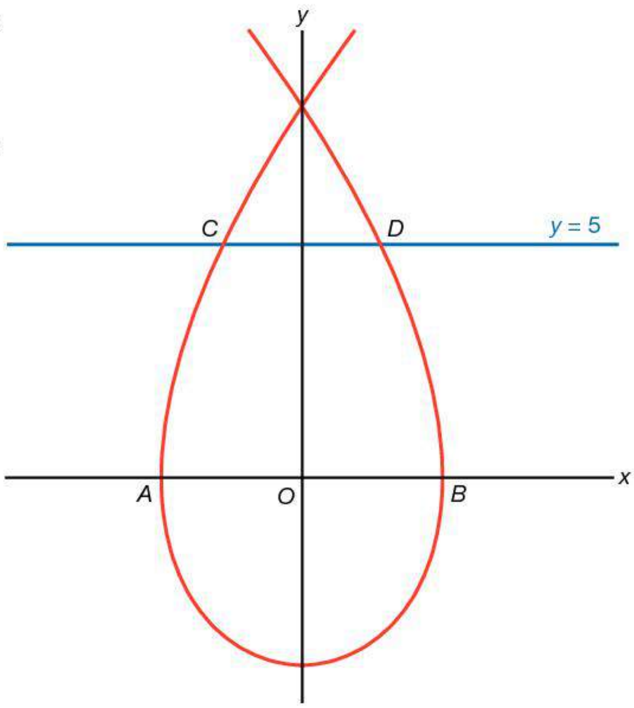
De baan snijdt de x-as in de punten A en B en de lijn $y = 5$ in de punten C en D. Zie figuur 10.61.

a Toon aan dat de raaklijn aan de baan verticaal is in de punten A en B.

b Bereken exact de baansnelheid en de baanversnelling in het punt C.

c De baanversnelling heeft voor $t > 0$ een minimum.
Bereken dit minimum in drie decimalen nauwkeurig.

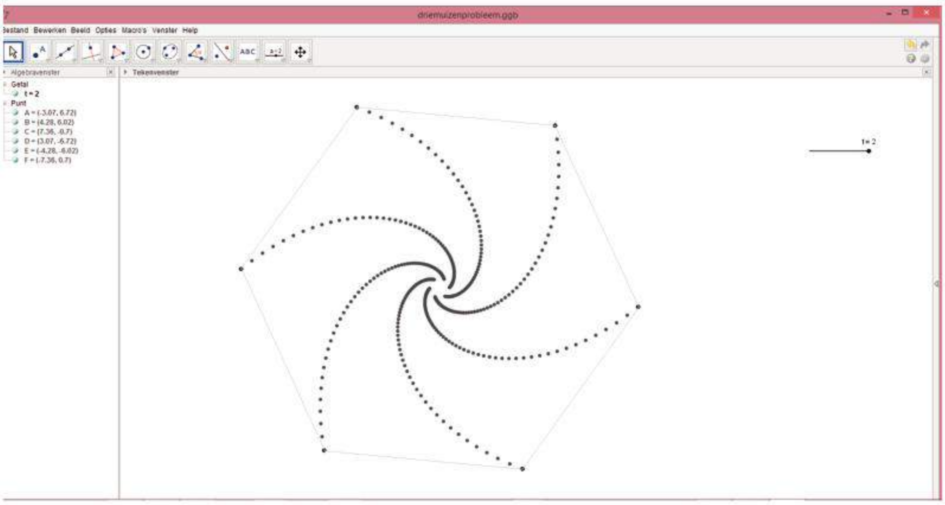
d Bereken in graden nauwkeurig de hoek φ waaronder de baan zichzelf snijdt.



figuur 10.61

Informatief Het muizenprobleem

Het muizenprobleem is een probleem waarin drie of meer muizen op de hoekpunten van een regelmatige veelhoek staan. De muizen lopen met gelijke snelheid in de richting van hun naaste buur. Welke baan wordt daarbij gevolgd en hoe groot is de afgelegde afstand tot ze bij elkaar komen?
Dit probleem met drie honden die starten op de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek werd geformuleerd door Édouard Lucas in 1877. In 1880 bewees Henri Brocard dat de banen logaritmische spiralen zijn.
Voor zes muizen in een regelmatige zeshoek met zijde 1, en waarin de muizen bewegen met een snelheid gelijk aan 1, geldt dat de afstand tussen twee naburige muizen vermindert met de snelheid van $\frac{1}{2}$ en dat de afgelegde afstand gelijk is aan 2.
Sinds het probleem in 1950 in het blad Historical Snapshots verscheen zijn verschillende varianten bestudeerd.
In de GeoGebra figuur zie je een variant in beeld gebracht waarbij de muizen steeds per tijdseenheid 5% van de afstand tot hun naaste buur afleggen.

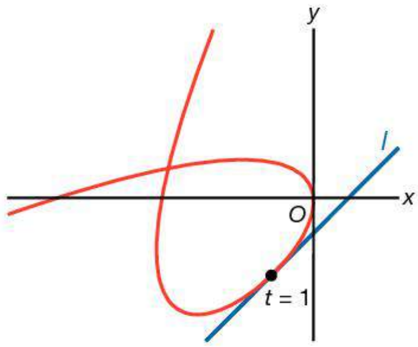


Terugblik

Plaatsvector en snelheidsvector

De bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 1\frac{1}{2}t^2 \\ y(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 2t \end{cases}$ met t de tijd geven de baan van een punt P.

In de figuur hiernaast is de baan getekend. De baan is een parameterkromme.



De snelheidsvector $\vec{v}(t)$ is de afgeleide van de plaatsvector

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t^3 - 1\frac{1}{2}t^2 \\ \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 2t \end{pmatrix}$, dus $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 3t \\ t^2 - t - 2 \end{pmatrix}$.

De baansnelheid is de grootte van de snelheidsvector, dus $\left|\vec{v}(t)\right| = \sqrt{(t^2 - 3t)^2 + (t^2 - t - 2)^2}$.

Om de vergelijking van de raaklijn l op te stellen in het punt waarvoor $t = 1$ bereken je $x(1)$, $y(1)$ en $\vec{v}(1)$.

Je krijgt $x(1) = -1\frac{1}{6}$, $y(1) = -2\frac{1}{6}$ en $\vec{v}(1) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Uit $\vec{v}(1) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ volgt $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Dus l: $x - y = c$.

Invullen van $\left(-1\frac{1}{6}, -2\frac{1}{6}\right)$ geeft $c = 1$, dus l: $x - y = 1$.

De baansnelheid die bij $t = 1$ hoort is $\left|\vec{v}(1)\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Om de punten van de baan te vinden met een horizontale raaklijn los je op $y'(t) = 0 \wedge x'(t) \neq 0$.

Je krijgt $t^2 - t - 2 = 0 \wedge t^2 - 3t \neq 0$

$$(t + 1)(t - 2) = 0 \wedge t(t - 3) \neq 0$$
$$(t = -1 \vee t = 2) \wedge t \neq 0 \wedge t \neq 3$$

Dus $t = -1$ en $t = 2$.

$t = -1$ geeft het punt $\left(-1\frac{5}{6}, 1\frac{1}{6}\right)$ en $t = 2$ geeft het punt $\left(-3\frac{1}{3}, -3\frac{1}{3}\right)$.

Versnellingsvector

De versnellingsvector $\vec{a}(t)$ is de afgeleide van de snelheidsvector, dus bij de bewegingsvergelijkingen hierboven hoort $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 2t - 3 \\ 2t - 1 \end{pmatrix}$.

De baanversnelling bereken je met de formule $a_b(t) = \dfrac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{\left|\vec{v}(t)\right|}$.

Bij de bewegingsvergelijkingen hierboven bereken je de baanversnelling voor $t = 3$ als volgt.

$$\vec{v}(3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{a}(3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ dus } a_b(3) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right|} = \frac{0 + 4 \cdot 5}{4} = 5.$$

Diagnostische toets

10.1 Vectoren en lijnen

1 Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Bereken de kentallen en de lengte van de volgende vectoren.

a $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$

b $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$

c $\vec{e} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$

2 De vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ wordt ontbonden in twee componenten die liggen op de lijnen k: $y = x$ en l: $y = -x$.
Bereken exact de lengte van deze componenten.

3 Gegeven zijn de punten $A(6, 8)$, $B(-4, 5)$ en $C(1, -4)$.
Stel een vectorvoorstelling op van
a de lijn k door B, evenwijdig met AC
b de lijn l door A en het midden van het lijnstuk BC
c het lijnstuk AC.

4 Gegeven is de lijn k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Onderzoek of de punten $A(-2, -9)$, $B(13, 1)$ en $C(23, 3)$ op k liggen.

10.2 Afstanden bij lijnen en cirkels

5 Bereken exact de afstand van het punt
a $A(4, 3)$ tot de lijn k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$
b $B(4, 1)$ tot de lijn l: $x = 3t + 2 \wedge y = t - 4$
c $C(5, 4)$ tot de lijn m: $y = x + 3$.

6 Stel vergelijkingen op van de lijnen k_1 en k_2 die door het punt $A(3, 2)$ gaan en op afstand $\sqrt{5}$ van het punt $B(8, 7)$ liggen.

7 Gegeven is de cirkel c: $x^2 + y^2 = 10$.
a Stel een vergelijking op van de lijn k die c raakt in $(-1, -3)$.
b Stel vergelijkingen op van de lijnen l_1 en l_2 met richtingscoëfficiënt 3 die c raken.
c Stel vergelijkingen op van de lijnen m_1 en m_2 door $(4, 2)$ die c raken.
d Stel vergelijkingen op van de lijnen n_1 en n_2 die c raken en loodrecht staan op de lijn p: $3x + y - 5 = 0$.

10.3 Vectoren en hoeken

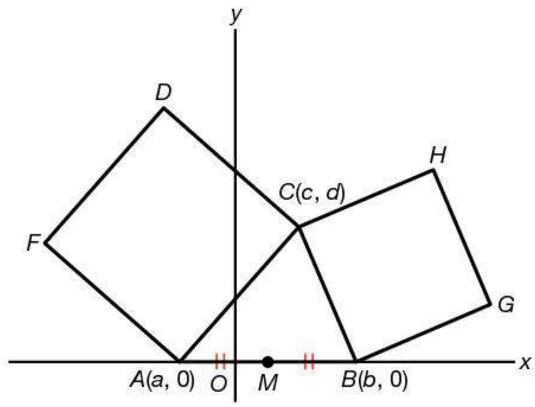
8 Gegeven zijn de punten $A(-2, 3)$, $B(4, 4)$ en $C(-3, -1)$.
Bereken de hoek tussen de lijnen
a AB en BC
b AB en AC.

9 **a** Stel een vergelijking op van de lijn k door het punt $(3, 4)$ die evenwijdig is met de lijn l: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$.
b Stel een vectorvoorstelling op van de lijn m door het punt $(1, 1)$ die loodrecht staat op de lijn n: $5x - y = -2$.
c Stel een vergelijking op van de lijn p door het punt $(-2, 3)$ die loodrecht staat op de lijn r: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

10 Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de lijnen
k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ en l: $2x - 3y = 22$.

10.4 Vectoren en rotaties

11 Gegeven is driehoek ABC met $A(a, 0)$, $B(b, 0)$ en $C(c, d)$. Hierbij is $b > a$, $c > 0$ en $d > 0$.
Op de zijden AC en BC van driehoek ABC worden de naar buiten gerichte vierkanten $ACDF$ en $BGHC$ geplaatst. Het punt M is het midden van lijnstuk AB. Zie figuur 10.62.
Bewijs dat de lijnen CM en DH elkaar loodrecht snijden en dat $DH = 2 \cdot CM$.

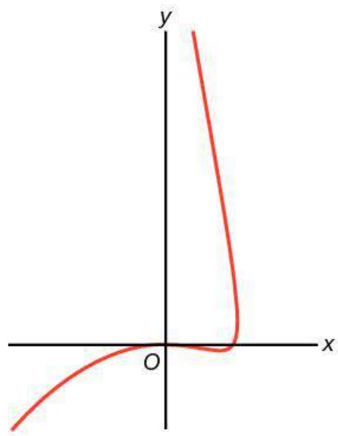


figuur 10.62

10.6 Snelheid en versnelling

12 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn gegeven door $\begin{cases} x(t) = 4t - t^2 \\ y(t) = \frac{2}{3}t^3 - t^2 \end{cases}$
Zie figuur 10.63.

a Voor welke t beweegt het punt P zowel naar rechts als omhoog?
b Bereken de coördinaten van de punten waarin de raaklijn evenwijdig is aan de x-as of aan de y-as.
c Bereken exact de baansnelheid van P in het snijpunt met de positieve x-as.
d Bereken in twee decimalen nauwkeurig de minimale snelheid van P.
e In welk punt is de versnelling evenwijdig aan de x-as?
f Bereken exact de baanversnelling voor $t = 3$.



figuur 10.63

10

Het Apolloprogramma was een ruimtevaartprogramma van de NASA om de mens op de maan te laten landen. In juli 1969 stond inderdaad de eerste mens op de maan. Bij de lancering werd de Saturnus V-raket gebruikt. Samen met de Apollocapsule had deze een lengte van 110,6 meter en een startgewicht van drie miljoen kg. De eerste trap van de raket stuwde de Apollo in 170 seconden naar een hoogte van 60 kilometer.

Wat leer je?

- Wat primitieve functies zijn en wat primitiveren is.
- Hoe je primitieve functies gebruikt om oppervlakten en inhouden te berekenen.
- Integralen gebruiken bij berekeningen met snelheid en versnelling.
- Hoe je integralen numeriek berekent met de grafische rekenmachine en hoe je dit gebruikt bij berekeningen van booglengten en omtrekken.

Integraalrekening

11

Voorkennis Herleiden

Theorie A Herleiden van machten

Je kent de regels $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$, $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ en $a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$.

Met deze regels is $x^{-2\frac{1}{3}}$ te herleiden tot $\dfrac{1}{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}$.

Immers $x^{-2\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{x^{2\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{x^{2+\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}$.

Voorbeeld

Herleid.

a $\dfrac{12}{2\frac{1}{4}}x^{2\frac{1}{4}}$

b $\dfrac{20}{-1\frac{1}{3}}x^{-1\frac{1}{3}}$

Uitwerking

a $\dfrac{12}{2\frac{1}{4}}x^{2\frac{1}{4}} = 12 \cdot \frac{4}{9} \cdot x^2 \cdot x^{\frac{1}{4}} = 5\frac{1}{3}x^2 \cdot \sqrt[4]{x}$

b $\dfrac{20}{-1\frac{1}{3}}x^{-1\frac{1}{3}} = 20 \cdot -\frac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{x^{1\frac{1}{3}}} = -\dfrac{15}{x \cdot x^{\frac{1}{3}}} = -\dfrac{15}{x \cdot \sqrt[3]{x}}$

1 Herleid.

a $\dfrac{10}{2\frac{1}{2}}x^{2\frac{1}{2}}$

b $\dfrac{30}{1\frac{1}{4}}x^{1\frac{1}{4}}$

c $\dfrac{14}{2\frac{1}{3}}x^{2\frac{1}{3}}$

d $\dfrac{3}{-1\frac{1}{2}}x^{-1\frac{1}{2}}$

e $\dfrac{5}{-2\frac{1}{5}}x^{-2\frac{1}{5}}$

f $\dfrac{8\frac{1}{2}}{-3\frac{1}{3}}x^{-3\frac{1}{3}}$

11

Theorie B Herleiden van afgeleiden

De afgeleide van $f(x) = \dfrac{e^{2x}+3}{4e^x}$ is te herleiden tot $f'(x) = \dfrac{e^{2x}-3}{4e^x}$.

Dit gaat als volgt.

$$f(x) = \frac{e^{2x}+3}{4e^x} \text{ geeft } f'(x) = \frac{4e^x \cdot 2e^{2x} - (e^{2x}+3) \cdot 4e^x}{(4e^x)^2} = \frac{2e^{2x} - e^{2x} - 3}{4e^x} = \frac{e^{2x}-3}{4e^x}$$

Deel teller en noemer door $4e^x$.

Voorbeeld

Bereken de afgeleide en herleid zo ver mogelijk.

a $f(x) = 4\ln^2(x) - 3\ln(x)$

b $g(x) = \dfrac{10 \cdot 3^x}{\ln(3)}$

c $h(x) = x^2 \cdot \sqrt{2x-1}$

Uitwerking

a $f(x) = 4\ln^2(x) - 3\ln(x)$ geeft $f'(x) = 8\ln(x) \cdot \dfrac{1}{x} - 3 \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{8\ln(x)}{x} - \dfrac{3}{x} = \dfrac{8\ln(x) - 3}{x}$

b $g(x) = \dfrac{10 \cdot 3^x}{\ln(3)} = \dfrac{10}{\ln(3)} \cdot 3^x$ geeft $g'(x) = \dfrac{10}{\ln(3)} \cdot 3^x \ln(3) = 10 \cdot 3^x$

c $h(x) = x^2 \cdot \sqrt{2x-1}$ geeft $h'(x) = 2x \cdot \sqrt{2x-1} + x^2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{2x-1}} \cdot 2 = 2x\sqrt{2x-1} + \dfrac{x^2}{\sqrt{2x-1}}$

$$= \frac{2x(2x-1)}{\sqrt{2x-1}} + \frac{x^2}{\sqrt{2x-1}} = \frac{4x^2 - 2x + x^2}{\sqrt{2x-1}} = \frac{5x^2 - 2x}{\sqrt{2x-1}}$$

2 Bereken de afgeleide en herleid zo ver mogelijk.

a $f(x) = x\ln(x) - x$

b $f(x) = x\sqrt{4x-3}$

c $f(x) = \dfrac{e^{4x} - 5}{2e^{3x}}$

d $f(x) = x^2\ln^2(x) - x^2\ln(x)$

e $f(x) = 6x^2\sqrt{x^2+1}$

f $f(x) = \dfrac{5 \cdot 2^x}{\ln(2)} - \dfrac{e^{2x} - 1}{e^x}$

Theorie C Herleiden van functiewaarden

Bij de functie $f(x) = 6x - \frac{1}{3}x^3$ is $f(4) = 6 \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot 4^3 = 24 - 21\frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}$

en $f(p) = 6p - \frac{1}{3}p^3$, dus $f(p) - f(4) = 6p - \frac{1}{3}p^3 - 2\frac{2}{3}$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}\pi x^3$.
Druk $f(2p) - f(p)$ uit in p.

Uitwerking

$f(2p) - f(p) = \frac{1}{2}\pi \cdot (2p)^3 - \frac{1}{2}\pi p^3 = \frac{1}{2}\pi \cdot 8p^3 - \frac{1}{2}\pi p^3 = 4\pi p^3 - \frac{1}{2}\pi p^3 = 3\frac{1}{2}\pi p^3$

3 Gegeven is de functie $f(x) = \pi\left(p^2x - \frac{1}{3}x^3\right)$.
Druk uit in p.

a $f(4) - f(p)$

b $f(2p) - f(p)$

c $f\left(\frac{3}{4}p\right) - f\left(\frac{1}{2}p\right)$

d $f\left(\frac{1}{3}p\right) - f\left(\frac{1}{3}\right)$

11

11.1 Primitieven en integralen

O 1 Gegeven is de functie $f(x) = 3x^2$.
In deze opgave zoeken we de functie g waarvoor geldt
$g'(x) = f(x)$ en $g(2) = 15$.
Omdat $g'(x) = f(x)$ is het functievoorschrift van g van de vorm
$g(x) = x^3 + c$.
a Licht dit toe.
b Bereken c.

Theorie A Primitieve functies

In opgave 1 heb je de functie g opgespoord waarvoor geldt dat
$g'(x) = 3x^2$ en $g(2) = 15$.
Een functie waarvoor geldt dat $g'(x) = f(x)$ heet een **primitieve functie** van f.
Een primitieve functie van f wordt genoteerd met de hoofdletter F.
In opgave 1 heb je gevonden $f(x) = 3x^2$ geeft $F(x) = x^3 + 7$.
Maar ook $F(x) = x^3 + 10$ is een primitieve van $f(x) = 3x^2$,
immers $\left[x^3 + 10\right]' = 3x^2$.
Iedere functie F waarvoor geldt $F' = f$ is een primitieve functie van f,
ook wel kortweg **primitieve** van f genoemd.

De functie F is een primitieve van de functie f als $F' = f$.

In het algemeen is $F(x) = 5x^3 + c$ met c een constante een primitieve van $f(x) = 15x^2$.
We zeggen dat $F(x) = 5x^3 + c$ de primitieven zijn van $f(x) = 15x^2$.
Het getal c heet de **integratieconstante**.

Voorbeeld

Toon aan dat $F(x) = x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x + 4$ een primitieve is van
$f(x) = \ln^2(x)$.

Aanpak
Bereken $F'(x)$ en laat zien dat $F'(x) = f(x)$.

Uitwerking
$$F'(x) = 1 \cdot \ln^2(x) + x \cdot 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} - 2\ln(x) - 2x \cdot \frac{1}{x} + 2$$
$$= \ln^2(x) + 2\ln(x) - 2\ln(x) - 2 + 2 = \ln^2(x)$$
Dus $F'(x) = f(x)$ ofwel F is een primitieve van f.

11

2 Toon aan dat

a $F(x) = (x^2 + 1)^6 + 1$ een primitieve is van $f(x) = 12x(x^2 + 1)^5$

b $G(x) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{2x} - 2$ een primitieve is van $g(x) = x\,e^{2x}$

c $H(x) = \ln^2(x) + 2\ln(x) + 3$ een primitieve is van $h(x) = \dfrac{2 + 2\ln(x)}{x}$

d $J(x) = \dfrac{e^{3x} - 10}{2e^x} - 4$ een primitieve is van $j(x) = \dfrac{e^{3x} + 5}{e^x}$

e $K(x) = \sin^3(x)$ een primitieve is van $k(x) = 3\cos(x) - 3\cos^3(x)$.

O 3 **a** Van welke functie is $F(x) = \frac{1}{5}x^5$ een primitieve?

b Van welke functie is $G(x) = \frac{1}{4}e^{4x+1}$ een primitieve?

c Van welke functie is $H(x) = \dfrac{3^x}{\ln(3)}$ een primitieve?

d Van welke functie is $J(x) = x\ln(x)$ een primitieve?

e Van welke functie is $K(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ een primitieve?

Theorie B Primitiveren

Het berekenen van primitieven heet **primitiveren**.
Omdat primitiveren het omgekeerde is van differentiëren, kun je vermoeden dat een primitieve van $f(x) = x^n$, met $n \neq -1$, de functie $F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$ is. Om aan te tonen dat dit vermoeden juist is, differentieer je de functie F.

$F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$ geeft $F'(x) = (n+1)\cdot\dfrac{1}{n+1}\cdot x^n = x^n$ en dit is $f(x)$.
Dus $F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$ is een primitieve van $f(x) = x^n$ met $n \neq -1$.
Op dezelfde manier toon je in opgave 4 de juistheid aan van de primitieven hieronder.

$f(x) = ax^n$ geeft $F(x) = \dfrac{a}{n+1}x^{n+1} + c$ met $n \neq -1$

$f(x) = g^x$ geeft $F(x) = \dfrac{g^x}{\ln(g)} + c$

$f(x) = e^x$ geeft $F(x) = e^x + c$

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ geeft $F(x) = \ln|x| + c$

$f(x) = \ln(x)$ geeft $F(x) = x\ln(x) - x + c$

$f(x) = {}^g\log(x)$ geeft $F(x) = \dfrac{1}{\ln(g)}(x\ln(x) - x) + c$

$f(x) = \sin(x)$ geeft $F(x) = -\cos(x) + c$

$f(x) = \cos(x)$ geeft $F(x) = \sin(x) + c$

11

Voorbeeld

Primitiveer.

a $f(x) = 10x\sqrt{x}$

b $g(x) = \dfrac{x^6 + 2x^2 - 7}{x^2}$

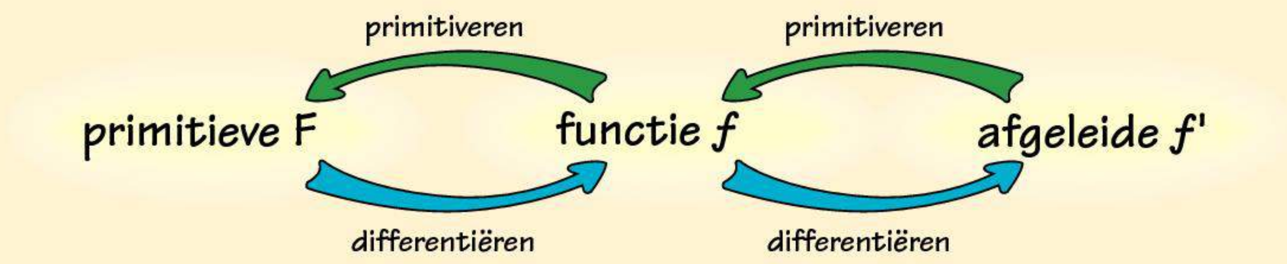
c $h(x) = {}^3\log(3x)$

Uitwerking

a $f(x) = 10x\sqrt{x} = 10x^{1\frac{1}{2}}$ geeft $F(x) = \dfrac{10}{2\frac{1}{2}}x^{2\frac{1}{2}} + c = 4x^2 \cdot \sqrt{x} + c$

b $g(x) = \dfrac{x^6 + 2x^2 - 7}{x^2} = x^4 + 2 - 7x^{-2}$ geeft $G(x) = \frac{1}{5}x^5 + 2x + 7x^{-1} + c = \frac{1}{5}x^5 + 2x + \dfrac{7}{x} + c$

c $h(x) = {}^3\log(3x) = {}^3\log(3) + {}^3\log(x) = 1 + {}^3\log(x)$ geeft $H(x) = x + \dfrac{1}{\ln(3)}(x\ln(x) - x) + c$



4 Toon de juistheid aan van de primitieven in de kernzin op bladzijde 109.

R 5 **a** Waarom geldt de regel $f(x) = ax^n$ geeft $F(x) = \dfrac{a}{n+1}x^{n+1} + c$ niet voor $n = -1$?

b Geef de primitieven van $f(x) = x^{-1}$.

c Toon aan: als F een primitieve is van f, dan is $a \cdot F$ een primitieve van $a \cdot f$.

6 Primitiveer.

a $f(x) = 6x^2$

b $f(x) = 2x^3 + 5x^4$

c $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x}{2x^3}$

d $f(x) = 10^x$

e $f(x) = 5 \cdot 2^x$

f $f(x) = x^2 + \sin(x)$

g $f(x) = \dfrac{x^3 + 2}{x^4}$

h $f(x) = x\sqrt{x} - 2\cos(x)$

7 Bereken de primitieven.

a $f(x) = x^3 - 3x$

b $f(x) = 5e^x$

c $f(x) = \dfrac{x^4 - 6}{2x^3}$

d $f(x) = 3^x + x^3$

e $f(x) = 2\ln(x)$

f $f(x) = \ln(2x)$

A 8 Primitiveer.

a $f(x) = e^{x+1}$

b $f(x) = \dfrac{8}{x^3}$

c $f(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 3}{x^4}$

d $f(x) = \ln\left(x\sqrt{x}\right)$

e $f(x) = {}^2\log\left(\dfrac{1}{x}\right)$

f $f(x) = 5\log(2x)$

9 Gegeven is de functie $f(x) = 2x - 3$.

a Bereken de primitieven van f.

b De grafiek van een primitieve van f gaat door het punt $(1, 2)$.
Bereken deze primitieve.

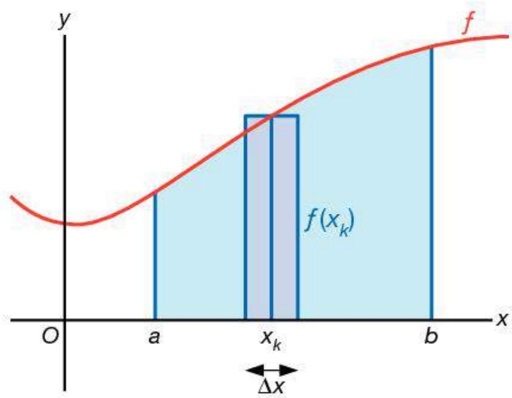
c De grafiek van een primitieve van f raakt de x-as.
Bereken deze primitieve.

A 10 Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 - 1)^2$.
De grafiek van een primitieve van f gaat door het punt $(1, 7)$.
Bereken deze primitieve.

D 11 De primitieve met integratieconstante 0 van de functie
$f(x) = x^2 e^{2x}$ is van de vorm $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$.
Bereken a, b en c.

Informatief Riemannsommen

De oppervlakte van een vlakdeel V kan worden benaderd met een Riemannsom. Zie het vlakdeel V hiernaast dat boven de x-as ligt en wordt ingesloten door de grafiek van de functie f, de x-as en de lijnen $x = a$ en $x = b$.
Verdeel het interval $[a, b]$ in n deelintervallen met gelijke lengte Δx. Bij ieder deelinterval hoort een rechthoek met breedte Δx en hoogte $f(x_k)$. Hierbij is x_k een getal uit het deelinterval. De oppervlakte van de rechthoek is $f(x_k) \cdot \Delta x$.
Door de oppervlakten van de n rechthoeken bij elkaar op te tellen krijg je een benadering van $O(V)$.
Dus $O(V) \approx f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + f(x_3) \cdot \Delta x + \ldots + f(x_n) \cdot \Delta x$.



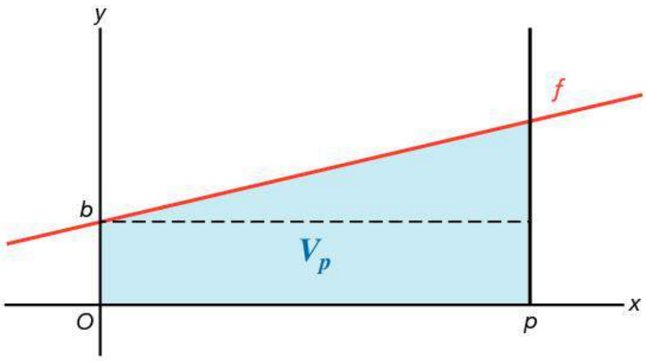
Deze Riemannsom wordt genoteerd als $\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x$. Hierbij wordt $\sum_{k=1}^{n}$ uitgesproken als 'de som van k is één tot n'.
Het benaderen van de oppervlakte van V met behulp van een Riemannsom wordt in het algemeen nauwkeuriger naarmate je het interval $[a, b]$ in meer deelintervallen met gelijke lengte Δx verdeelt. Ofwel voor een nauwkeuriger benadering neem je in de Riemannsom Δx steeds kleiner. Door de limiet voor Δx naar 0 te nemen krijg je de exacte oppervlakte.

Dus $O(V) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x$ en dit wordt genoteerd als $\int_a^b f(x)\,dx$.

O 12 Gegeven is de functie $f(x) = ax + b$ met $a > 0$ en $b > 0$. Voor $p > 0$ wordt het vlakdeel V_p ingesloten door de grafiek van f, de x-as, de y-as en de lijn $x = p$. Zie figuur 11.1.
De oppervlakte $O(p)$ van V_p is afhankelijk van p.

a Toon aan dat $O(p) = \frac{1}{2}ap^2 + bp$.

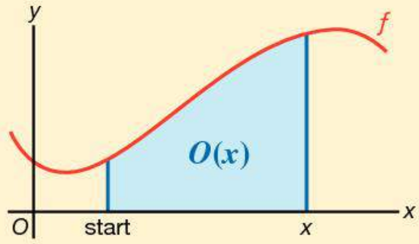
b Bereken $O'(p)$. Wat valt op?



figuur 11.1

Theorie C Integralen

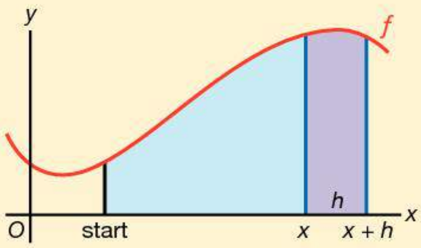
De oppervlakte $O(x)$ van het blauwe vlakdeel in figuur 11.2 is een primitieve van $f(x)$. Hiervoor tonen we aan dat $O'(x) = f(x)$.



figuur 11.2

Je weet $O'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{O(x+h) - O(x)}{h}$ ... **(1)**

In figuur 11.3 is de oppervlakte van het paarse vlakdeel gelijk aan $O(x + h) - O(x)$. Voor kleine waarden van h is het paarse vlakdeel te benaderen door een rechthoek met zijden h en $f(x)$, dus voor kleine waarden van h is $O(x + h) - O(x) \approx f(x) \cdot h$,
ofwel $f(x) \approx \dfrac{O(x+h) - O(x)}{h}$.

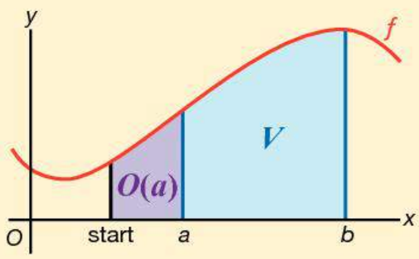


figuur 11.3

Zo krijg je $f(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{O(x+h) - O(x)}{h}$ ... **(2)**

Uit **(1)** en **(2)** volgt $O'(x) = f(x)$, dus O is een primitieve van f.
De oppervlakte van het vlakdeel V in figuur 11.4 noteren we als $O(V) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Hierin is $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ een **integraal**.

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ spreek je uit als 'de integraal van a tot b van f x d x'.



figuur 11.4

In figuur 11.4 is $O(V) = O(b) - O(a)$.

Je weet dat O een primitieve van f is, dus $O(x) = F(x) + c$.
Hieruit volgt

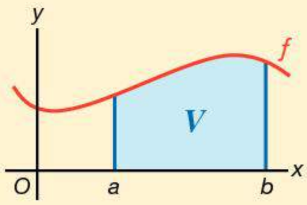
$$O(V) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = O(b) - O(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a).$$

Merk op dat bij het berekenen van een integraal met behulp van een primitieve de constante c wegvalt. Neem dus bij zo'n berekening $c = 0$.
Het is de gewoonte om $F(b) - F(a)$ te noteren als $\left[F(x)\right]_a^b$.

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Het berekenen van een integraal heet **integreren**.

De oppervlakte van het vlakdeel V dat boven de x-as ligt en wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijnen $x = a$ en $x = b$ is $O(V) = \int_a^b f(x)\,dx$.



Voorbeeld

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = 4 - x^2$, de positieve x-as en de y-as.

a Bereken exact de oppervlakte van V.

b De lijn $x = p$ verdeelt V in twee delen met gelijke oppervlakte. Bereken p in twee decimalen nauwkeurig.

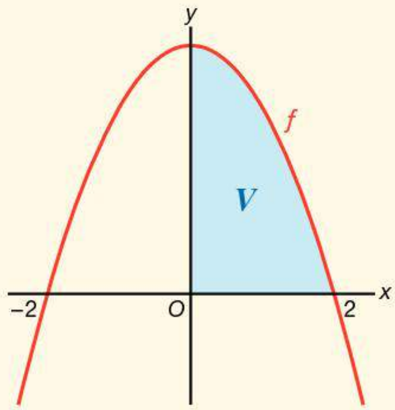
Uitwerking

a $f(x) = 0$ geeft $4 - x^2 = 0$

$x^2 = 4$

$x = 2 \vee x = -2$

$$O(V) = \int_0^2 (4 - x^2)\,dx = \left[4x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^2 = 8 - \tfrac{1}{3} \cdot 8 - 0 = 5\tfrac{1}{3}$$



b $\int_0^p (4 - x^2)\,dx = 2\tfrac{2}{3} \longleftarrow \boxed{\text{De helft van } 5\tfrac{1}{3} \text{ is } 2\tfrac{2}{3}.}$

$\left[4x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^p = 2\tfrac{2}{3}$

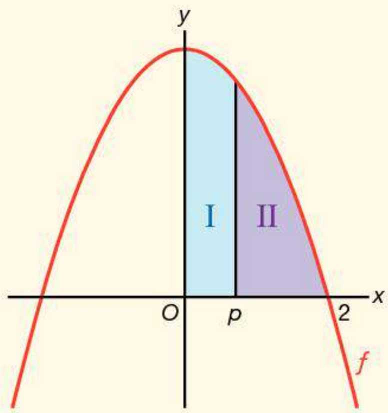
$\left(4p - \tfrac{1}{3}p^3\right) - 0 = 2\tfrac{2}{3}$

$4p - \tfrac{1}{3}p^3 = 2\tfrac{2}{3}$

Voer in $y_1 = 4x - \tfrac{1}{3}x^3$ en $y_2 = 2\tfrac{2}{3}$.

Intersect geeft $x \approx 0{,}69$.

Dus $p \approx 0{,}69$.



13 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = 3x^2 - x^3$ en de x-as.

a Bereken algebraïsch de oppervlakte van V.

b De lijn $x = p$ verdeelt V in twee delen met gelijke oppervlakte. Bereken p in twee decimalen nauwkeurig.

14 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$, de x-as en de lijn $x = p$.

a Neem $p = 12$ en bereken exact de oppervlakte van V.

b Bereken algebraïsch voor welke waarde van p de oppervlakte van V gelijk is aan 18.

Het vlakdeel W_1 wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$, de x-as en de lijn $x = 4$.
Het vlakdeel W_2 wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$, de x-as en de lijnen $x = 4$ en $x = p$ met $p > 4$.

c Bereken exact voor welke waarde van p geldt $O(W_1) = O(W_2)$.

15 Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$ met domein $[0, \pi]$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as.
Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijnen $x = \frac{1}{3}\pi$ en $x = p$ met $p > \frac{1}{3}\pi$.
Bereken exact voor welke waarde van p de oppervlakte van W de helft is van de oppervlakte van V.

16 Gegeven is de functie $f(x) = e^x$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as, de y-as en de lijn $x = p$ met $p > 0$.

a Bereken exact voor welke waarde van p de oppervlakte van V gelijk is aan 5.

Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijnen $x = p$ en $x = 2p$ met $p > 0$.

b Bereken exact voor welke waarde van p de oppervlakte van W twee keer zo groot is als de oppervlakte van V.

Informatief Bepaalde en onbepaalde integraal

De hoofdstelling van de integraalrekening is $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Hierbij is de **integrand** $f(x)$ in de **bepaalde integraal** $\int_a^b f(x)\,dx$

geïntegreerd tussen de grenzen a en b. Afhankelijk van de keuze van a en b is de uitkomst een constante of een functie. Zo is bijvoorbeeld
$\int_2^3 4x^3\,dx = [x^4]_2^3 = 81 - 16 = 65$ een constante en $\int_2^t 4x^3\,dx = [x^4]_2^t = t^4 - 16$ een functie van t.

In de definitie van de primitieve functie $F(x) = \int f(x)\,dx$ zijn de grenzen van de integraal onbepaald. Een **onbepaalde integraal**, zoals $\int f(x)\,dx$, noemt men ook wel een primitieve functie.

A 17 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = \ln(x)$, de x-as en de lijn $x = p$ met $p > 1$.

a Neem $p = e^2$ en bereken exact de oppervlakte van V.

b Bereken in drie decimalen nauwkeurig voor welke waarde van p de oppervlakte van V gelijk is aan 10.

Geschiedenis Georg Friedrich Bernhard Riemann

De Duitse wiskundige Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) studeerde in Göttingen eerst filosofie en theologie. Later stapte hij over op wiskunde. In 1851 promoveerde hij en in 1859 werd hij professor in Göttingen.
Hij voerde in een artikel over Fourierreeksen het integraalbegrip in.
Lange tijd is zijn methode om oppervlakten onder een kromme te berekenen de belangrijkste geweest. In de twintigste eeuw is door Lebesgue een nieuwe methode ontwikkeld, maar met de komst van de computer is de methode van Riemann weer de belangrijkste geworden, omdat dat een numerieke methode is.
Ook op andere gebieden was Riemann actief. Het tegenwoordige onderzoek naar schokgolven, onder andere bij sneeuwlawines en stofexplosies, bouwt voort op zijn onderzoek over akoestische trillingen.

11

Terugblik

Primitieve functies

Elke functie F waarvoor geldt $F' = f$ is een primitieve functie van f. Als F een primitieve van f is, dan zijn alle functies $F + c$ primitieven van f. Het getal c heet de integratieconstante.

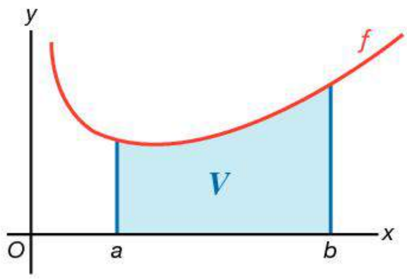
Regels voor primitiveren

functie	primitieven		functie	primitieven
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \;\; (n \neq -1)$		$\ln(x)$	$x\ln(x) - x + c$
g^x	$\frac{g^x}{\ln(g)} + c$		${}^g\log(x)$	$\frac{1}{\ln(g)}(x\ln(x) - x) + c$
e^x	$\mathrm{e}^x + c$		$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$		$\cos(x)$	$\sin(x) + c$

Primitiveren

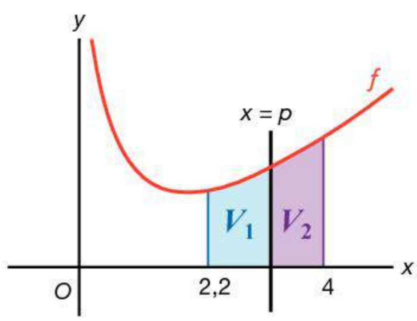
- $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 7x}{x^2} = x + 1 - 7x^{-1}$ geeft $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 7\ln\lvert x\rvert + c$
- $g(x) = \ln\left(\sqrt[3]{x}\right) = \ln\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}\ln(x)$ geeft $G(x) = \frac{1}{3}(x\ln(x) - x) + c$
- $h(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^3 + 3^x$ geeft $H(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^3x + \dfrac{3^x}{\ln(3)} + c$

Oppervlakten



De oppervlakte van het vlakdeel V in de figuur hiernaast is $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$. Hierin is $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ een integraal. Bij $f(x) = \dfrac{x^3 + 2}{x^2}$ en de grenzen $a = 2$ en $b = 4$ krijg je

$$O(V) = \int_2^4 \frac{x^3 + 2}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_2^4 (x + 2x^{-2})\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}x^2 - 2x^{-1}\right]_2^4 = \left[\tfrac{1}{2}x^2 - \frac{2}{x}\right]_2^4 = 8 - \tfrac{1}{2} - (2 - 1) = 6\tfrac{1}{2}.$$



Om te berekenen voor welke p de lijn $x = p$ het vlakdeel V in twee delen met gelijke oppervlakten verdeelt los je de vergelijking $\int_2^p f(x)\,\mathrm{d}x = 3\frac{1}{4}$ op.

Dit geeft $\left[\tfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{2}{x}\right]_2^p = 3\tfrac{1}{4}$ ofwel $\tfrac{1}{2}p^2 - \dfrac{2}{p} - (2 - 1) = 3\tfrac{1}{4}$.

Voer in $y_1 = \frac{1}{2}p^2 - \dfrac{2}{p} - 1$ en $y_2 = 3\frac{1}{4}$. Intersect geeft $x = 3{,}127...$, dus de lijn $x = 3{,}13$ verdeelt het vlakdeel V in twee delen met gelijke oppervlakte.

11.2 Oppervlakten

O 18 Gegeven is de functie $f(x) = (3x + 1)^5$.
De primitieven van f zijn van de vorm $F(x) = a(3x + 1)^6 + c$.
a Toon aan dat $F'(x) = 18a(3x + 1)^5$.
b Bereken a.

Theorie A Primitieven en de kettingregel

Bij het primitiveren kan de kettingregel een rol spelen.
Om de primitieven van $f(x) = \sqrt{4x - 1}$ met integratieconstante 0 op te sporen, schrijf je $f(x)$ als $(4x - 1)^{\frac{1}{2}}$.

Een primitieve is van de vorm $F(x) = a \cdot (4x - 1)^{1\frac{1}{2}}$.

$F'(x) = 1\frac{1}{2}a \cdot (4x - 1)^{\frac{1}{2}} \cdot 4 = 6a\sqrt{4x - 1}$

$F'(x) = f(x)$, dus $6a = 1$ ofwel $a = \frac{1}{6}$.

Dus $F(x) = \frac{1}{6}(4x - 1)^{1\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}(4x - 1)\sqrt{4x - 1}$.

In plaats van te werk te gaan zoals hierboven, kun je ook de volgende regel gebruiken.

De primitieven van $f(ax + b)$ zijn $\frac{1}{a}F(ax + b) + c$.

Je gaat dit aantonen in opgave 19.
De primitieven in de kernzin op bladzijde 109 kunnen met deze regel algemener worden geformuleerd.
Zo krijg je bijvoorbeeld

- de primitieven van $f(x) = e^{ax + b}$ zijn $F(x) = \frac{1}{a}e^{ax + b} + c$.
- de primitieven van $f(x) = \sin(ax + b)$ zijn $F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax + b) + c$.

Zie verder opgave 20.

Voorbeeld

Primitiveer $f(x) = \sqrt{4x - 1}$.

Uitwerking

$f(x) = \sqrt{4x - 1} = (4x - 1)^{\frac{1}{2}}$ geeft $F(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}(4x - 1)^{1\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{6}(4x - 1)\sqrt{4x - 1} + c$

19 Toon aan dat $\frac{1}{a}F(ax + b) + c$ primitieven zijn van $f(ax + b)$.

11

20 Gebruik de regel
de primitieven van $f(ax + b)$ zijn $\frac{1}{a} F(ax + b) + c$
voor het berekenen van de primitieven.

a $f(x) = (ax + b)^n$
b $f(x) = g^{ax + b}$
c $f(x) = \dfrac{1}{ax + b}$
d $f(x) = \ln(ax + b)$
e $f(x) = {}^g\log(ax + b)$
f $f(x) = \cos(ax + b)$

T 21 [▶▶25] Bereken de primitieven.

a $f(x) = \dfrac{3}{(2x - 1)^4}$
b $f(x) = (4x + 3)\sqrt{4x + 3}$
c $f(x) = 2\sin\left(3x + \frac{1}{2}\pi\right)$
d $f(x) = x^2 - \ln\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$
e $f(x) = \dfrac{6}{3x + 1}$
f $f(x) = e^{4x + 1} - 4^{ex}$
g $f(x) = 5\log(3x + 2)$
h $f(x) = 3x - \cos(3x + 1)$

22 Bereken de primitieven.

a $f(x) = (2x - 1)^6$
b $g(x) = \dfrac{1}{(3x + 4)^3}$
c $h(x) = 4\sqrt{3 - 2x}$
d $j(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1 - x}}$

23 Bereken de primitieven.

a $f(x) = 4\sin\left(\frac{1}{3}x\right)$
b $g(x) = x^2 - 5\cos(2x)$
c $h(x) = \sin\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right)$
d $j(x) = 3\cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi\right)$

24 Primitiveer.

a $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$
b $f(x) = \dfrac{3}{2x - 5}$
c $f(x) = e^{4x - 1}$
d $f(x) = \ln(4x - 1)$
e $f(x) = (2x + 1)\sqrt{2x + 1}$
f $f(x) = 2^{3x}$
g $f(x) = 3^{2 - 5x}$
h $f(x) = {}^2\log(5x + 3)$

25 Bereken exact.

a $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}\pi} \left(2x + \cos\left(\tfrac{1}{2}x\right)\right) dx$
b $\displaystyle\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \left(x^2 - 2\sin\left(x - \tfrac{1}{6}\pi\right)\right) dx$

R 26 Je weet $f(x) = \sqrt{4x - 1}$ geeft $F(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}(4x - 1)^{1\frac{1}{2}} + c$.

a Waarom kun je de hierbij gebruikte regel niet hanteren bij het zoeken van de primitieven van $g(x) = \sqrt{4x^2 - 1}$?

Voor het zoeken van de primitieven van $g(x) = \sqrt{4x^2 - 1}$ zou je misschien denken te kunnen uitgaan van $G(x) = a(4x^2 - 1)^{1\frac{1}{2}}$.

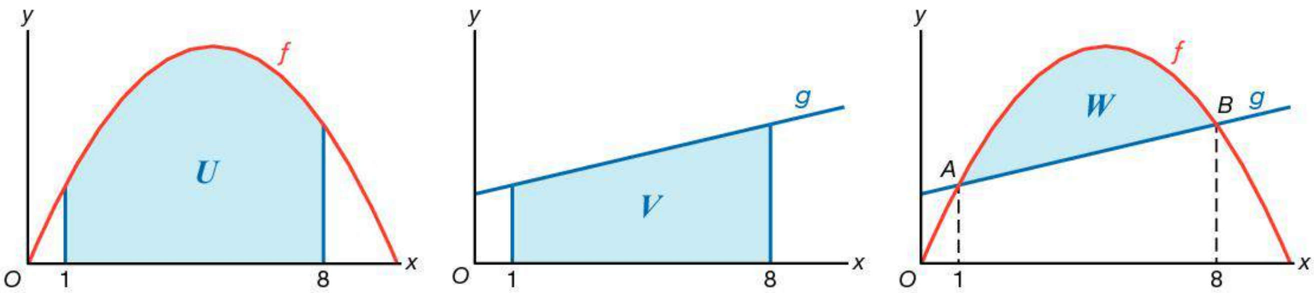
b Licht toe dat je ook op deze manier geen primitieven van g kunt vinden.

11

A 27 Gegeven is de functie $f(x) = 1 + 2\cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{6}\pi\right)$ met domein $[0, 4\pi]$.
Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as.

D 28 Gegeven is de functie $f(x) = 2e^{1 - \frac{1}{3}x}$ en de lijnen k: $x = -p$ en l: $x = p$ met $p > 0$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as, de y-as en de lijn k. Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as, de y-as en de lijn l.
Bereken exact voor welke waarde van p de oppervlakte van V twee keer zo groot is als de oppervlakte van W.

O 29 Gegeven zijn de functies $f(x) = 10x - x^2$ en $g(x) = x + 8$. De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten $A(1, 9)$ en $B(8, 16)$.
Het vlakdeel U wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijnen $x = 1$ en $x = 8$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van g, de x-as en de lijnen $x = 1$ en $x = 8$.
Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafieken van f en g.



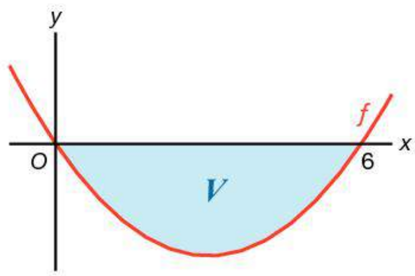
figuur 11.5

a Bereken $O(U)$, $O(V)$ en $O(W)$.

b Bereken $\int_1^8 (f(x) - g(x))\,dx$. Wat valt je op?

O 30 In figuur 11.6 is de grafiek van $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x$ getekend. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as.

Bereken $\int_0^6 f(x)\,dx$.



figuur 11.6

Theorie B Oppervlakte van een vlakdeel tussen grafieken

In opgave 29 heb je gezien dat $O(W) = O(U) - O(V) =$

$$\int_1^8 f(x)\,dx - \int_1^8 g(x)\,dx = \int_1^8 (f(x) - g(x))\,dx.$$

Aan de hand van figuur 11.7 tonen we aan dat

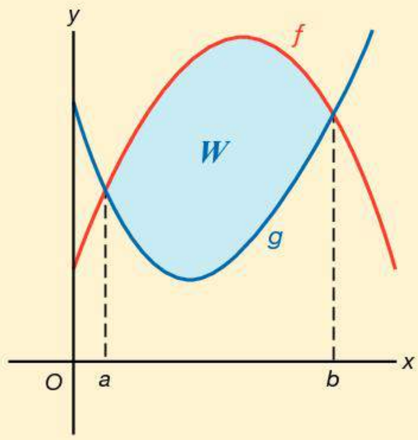
$$O(W) = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

Dit gaat als volgt.

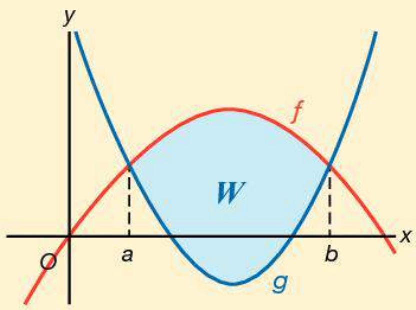
$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b - \Big[G(x)\Big]_a^b =$$

$$F(b) - F(a) - (G(b) - G(a)) = F(b) - G(b) - (F(a) - G(a)) =$$

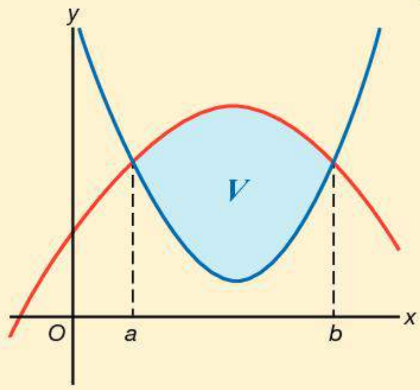
$$\Big[F(x) - G(x)\Big]_a^b = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$



figuur 11.7



figuur 11.8a



figuur 11.8b

Ook in figuur 11.8a geldt $O(W) = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$. Dit kun je inzien door de grafieken van f en g beide c omhoog te schuiven.

De oppervlakte tussen twee grafieken is $\int_a^b$(bovenste – onderste)dx.

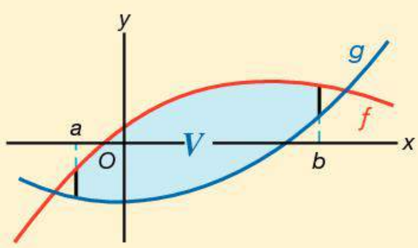
Zie figuur 11.8b.

$$O(W) = O(V) = \int_a^b (f(x) + c)\,dx - \int_a^b (g(x) + c)\,dx =$$

$$\int_a^b (f(x) + c - g(x) - c)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

De oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de lijnen $x = a$ en $x = b$ en de grafieken van de functies f en g met $f(x) \geq g(x)$ op het interval $[a, b]$ is

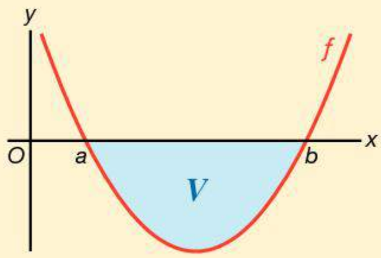
$$O(V) = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$



De integraal die je bij opgave 30 hebt uitgerekend is negatief.
Dit kan dus niet de oppervlakte van vlakdeel V zijn.
De oppervlakte van het vlakdeel V in figuur 11.9 is

$$O(V) = \int_a^b (0 - f(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

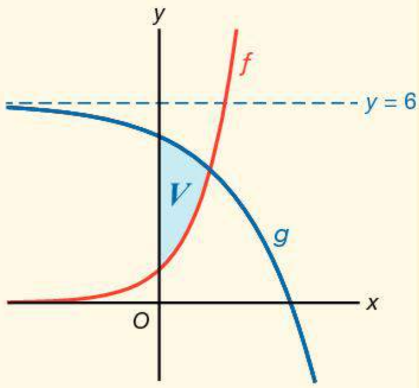
De bovenste grafiek is de lijn $y = 0$.



figuur 11.9

Voorbeeld

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van $f(x) = e^x$, $g(x) = 6 - e^{\frac{1}{2}x}$ en de y-as. Zie figuur 11.10.
Bereken exact de oppervlakte van V.



figuur 11.10

Uitwerking

$f(x) = g(x)$ geeft $e^x = 6 - e^{\frac{1}{2}x}$
$e^x + e^{\frac{1}{2}x} - 6 = 0$
Stel $e^{\frac{1}{2}x} = u$.
$u^2 + u - 6 = 0$
$(u - 2)(u + 3) = 0$
$u = 2 \vee u = -3$
$e^{\frac{1}{2}x} = 2 \vee e^{\frac{1}{2}x} = -3$
$\frac{1}{2}x = \ln(2)$ vold. niet
$x = 2\ln(2)$

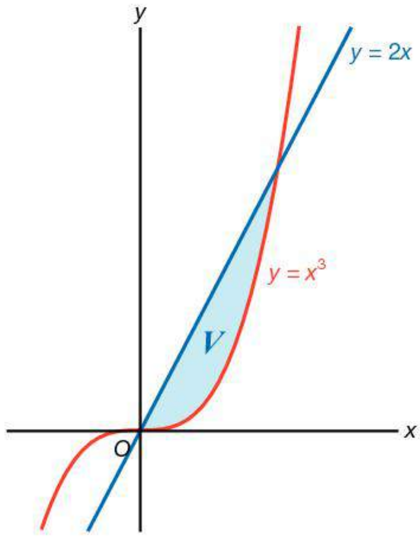
$$O(V) = \int_0^{2\ln(2)} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\ln(2)} (6 - e^{\frac{1}{2}x} - e^x)\,\mathrm{d}x = \left[6x - 2e^{\frac{1}{2}x} - e^x\right]_0^{2\ln(2)}$$

$$= 12\ln(2) - 2 \cdot \underbrace{2}_{e^{\frac{1}{2}x} = 2} - \underbrace{4}_{e^x = \left(e^{\frac{1}{2}x}\right)^2 = 2^2 = 4} - (0 - 2 - 1) = 12\ln(2) - 5$$

31 Het vlakdeel V van figuur 11.11 wordt ingesloten door de grafiek van $y = x^3$ en de lijn $y = 2x$.

a Bereken algebraïsch de oppervlakte van V.

b De lijn $x = p$ verdeelt V in twee delen met gelijke oppervlakte.
Bereken p exact.



figuur 11.11

32 Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + 1$.

a Het vlakdeel V ligt boven de lijn $y = 1$ en wordt ingesloten door de lijn $y = 1$ en de grafiek van f.
Bereken exact de oppervlakte van V.

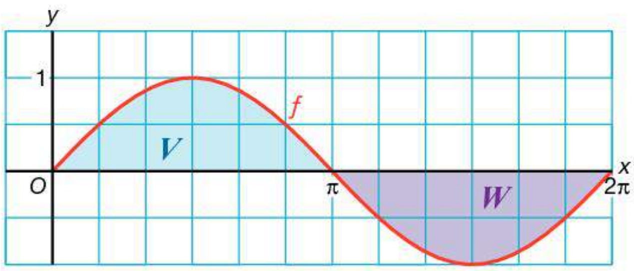
b Het vlakdeel W ligt onder de lijn $y = 1$ en wordt ingesloten door de lijn $y = 1$ en de grafiek van f.
Bereken exact de oppervlakte van W.

33 Gegeven zijn de functies $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ en $g(x) = -x$.

a Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van f en g.
Bereken exact de oppervlakte van V.

b Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as.
Bereken exact de oppervlakte van W.

34 In figuur 11.12 is de grafiek getekend van de functie $f(x) = \sin(x)$ met $D_f = [0, 2\pi]$. Het vlakdeel V ligt boven de x-as en wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as. Het vlakdeel W ligt onder de x-as en wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as.



figuur 11.12

a Bereken $O(V)$ en $O(W)$.

b Bereken $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$. Licht de uitkomst toe.

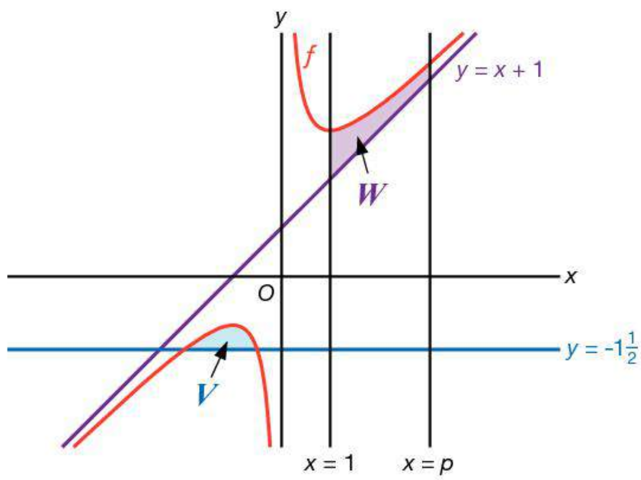
35 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(2x)$ met domein $[0, \pi]$.
Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g.

11

A 36 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$.

a Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f en de lijn $y = -1\frac{1}{2}$. Bereken exact de oppervlakte van V.

b De oppervlakte van het vlakdeel W, ingesloten door de grafiek van f en de lijnen $y = x + 1$, $x = 1$ en $x = p$ met $p > 1$ is gelijk aan 2. Bereken exact de waarde van p.



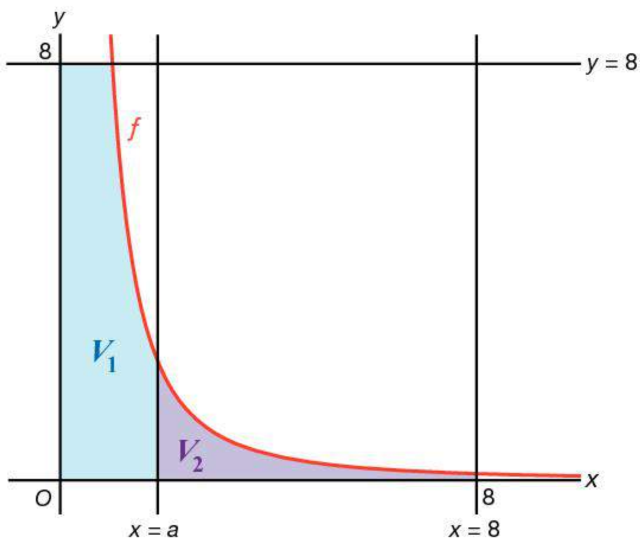
figuur 11.13

A 37 De grafiek van $f(x) = 3^x$, de y-as en de lijn $y = 81$ sluiten het vlakdeel V in.

a Bereken exact de oppervlakte van V.

b De lijn $x = a$ verdeelt V in twee delen met gelijke oppervlakte. Bereken a in twee decimalen nauwkeurig.

A 38 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = \dfrac{8}{x^2}$, de x-as, de y-as en de lijnen $x = 8$ en $y = 8$.
De lijn $x = a$ verdeelt V in de vlakdelen V_1 en V_2, waarbij $O(V_1) : O(V_2) = 2 : 1$.
Zie figuur 11.14.
Bereken algebraïsch de waarde van a.



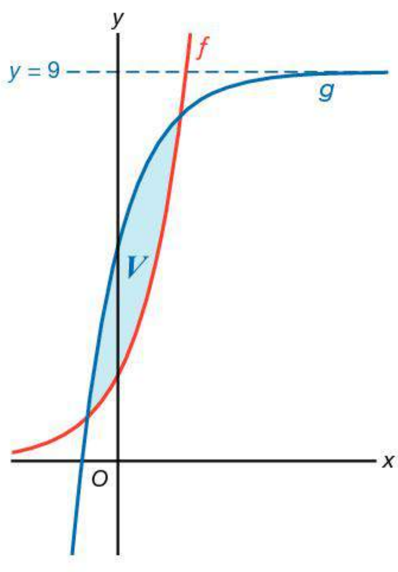
figuur 11.14

A 39 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van $f(x) = 2\,\mathrm{e}^x$ en $g(x) = 9 - 4\,\mathrm{e}^{-x}$. Zie figuur 11.15. De oppervlakte van V is $27\ln(2) - 14$.

a Toon dit aan.

Rob beweert dat de oppervlakte van het deel van V dat rechts van de y-as ligt $\frac{3}{4}$ deel is van de oppervlakte van V.

b Onderzoek langs algebraïsche weg of Rob gelijk heeft.



figuur 11.15

Terugblik

Primitieven en de kettingregel

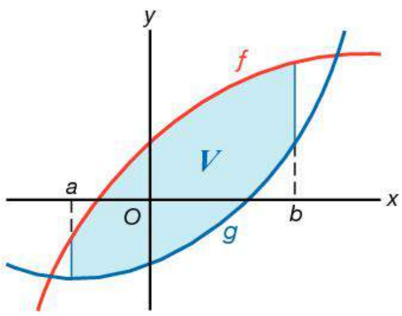
Als F een primitieve is van f, dan is $\frac{1}{a}F(ax+b)$ een primitieve van $f(ax+b)$. Deze regel geeft bijvoorbeeld dat $F(x) = \frac{1}{a}((ax+b)\ln(ax+b) - (ax+b)) + c$ de primitieven zijn van $f(x) = \ln(ax+b)$.

- $f(x) = \dfrac{6}{(2x-3)^4} = 6(2x-3)^{-4}$ geeft $F(x) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{3}(2x-3)^{-3} + c = \dfrac{-1}{(2x-3)^3} + c$
- $g(x) = 3\sqrt{2x-1} = 3(2x-1)^{\frac{1}{2}}$ geeft $G(x) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}(2x-1)^{1\frac{1}{2}} + c = (2x-1)\sqrt{2x-1} + c$
- $h(x) = 5\,\mathrm{e}^{4x-3}$ geeft $H(x) = 5 \cdot \frac{1}{4}\mathrm{e}^{4x-3} + c = 1\frac{1}{4}\mathrm{e}^{4x-3} + c$
- $k(x) = \dfrac{3}{4x-1}$ geeft $K(x) = 3 \cdot \frac{1}{4}\ln|4x-1| + c = \frac{3}{4}\ln|4x-1| + c$
- $l(x) = 5 \cdot 2^{3-x}$ geeft $L(x) = 5 \cdot -1 \cdot \dfrac{2^{3-x}}{\ln(2)} + c = \dfrac{-5 \cdot 2^{3-x}}{\ln(2)} + c$
- $p(x) = 2\sin\left(1\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi\right)$ geeft $P(x) = -2 \cdot \frac{2}{3}\cos\left(1\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi\right) + c = -1\frac{1}{3}\cos\left(1\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi\right) + c$

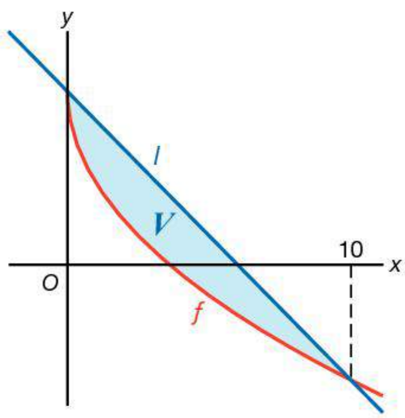
Oppervlakte van een vlakdeel tussen grafieken

De oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de lijnen $x = a$ en $x = b$ en de grafieken van de functies f en g met $f(x) \geq g(x)$ op het interval $[a, b]$, is

$$O(V) = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$



Het vlakdeel V van de figuur hiernaast wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = 6 - \sqrt{10x}$ en de lijn l: $y = -x + 6$.
Oplossen van de vergelijking $6 - \sqrt{10x} = -x + 6$ geeft $x = 0 \vee x = 10$.



Dus $O(V) = \displaystyle\int_0^{10} \left(-x + 6 - (6 - \sqrt{10x})\right)\mathrm{d}x = \int_0^{10} \left(\sqrt{10x} - x\right)\mathrm{d}x$

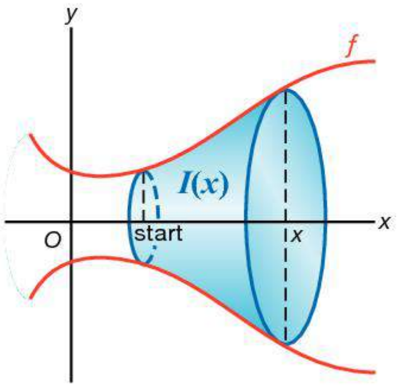
$$= \int_0^{10} ((10x)^{\frac{1}{2}} - x)\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{10} \cdot \tfrac{2}{3}(10x)^{1\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}x^2\right]_0^{10}$$

$$= \left[\tfrac{1}{15} \cdot 10x\sqrt{10x} - \tfrac{1}{2}x^2\right]_0^{10} = \left[\tfrac{2}{3}x\sqrt{10x} - \tfrac{1}{2}x^2\right]_0^{10}$$

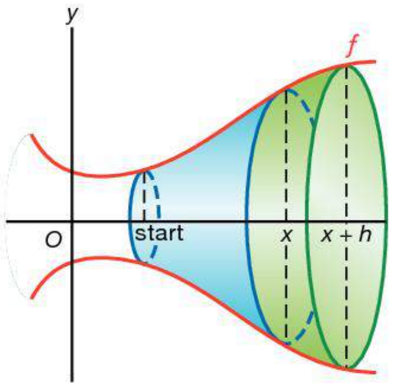
$$= \tfrac{2}{3} \cdot 10 \cdot 10 - \tfrac{1}{2} \cdot 10^2 - 0 = 16\tfrac{2}{3}.$$

11.3 Inhouden

O 40 In figuur 11.16 wordt de grafiek van f gewenteld om de x-as. $I(x)$ is de inhoud van het blauwe lichaam dat zo ontstaat.



figuur 11.16



figuur 11.17

In figuur 11.17 is de inhoud van het groene lichaam gelijk aan $I(x + h) - I(x)$.
De inhoud van het groene lichaam is ook te benaderen door $\pi \cdot (f(x))^2 \cdot h$.

a Licht dit toe.
b Hoe volgt uit bovenstaande dat $I(x)$ een primitieve is van $\pi \cdot (f(x))^2$?

Theorie A De inhoud van een omwentelingslichaam

Voor de inhoudsfunctie I in opgave 40 geldt

$$I'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{I(x+h) - I(x)}{h} \quad \textbf{...(1)}$$

In figuur 11.17 is het groene lichaam te benaderen door een cilinder met oppervlakte grondvlak $\pi \cdot (f(x))^2$ en hoogte h, dus
$I(x + h) - I(x) \approx \pi \cdot (f(x))^2 \cdot h$.

Hieruit volgt dat $\dfrac{I(x+h) - I(x)}{h} \approx \pi \cdot (f(x))^2$, dus

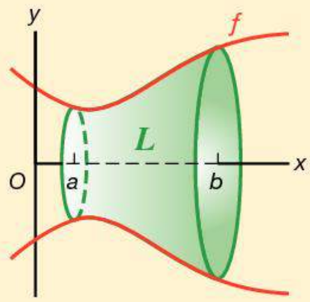
$$\pi \cdot (f(x))^2 = \lim_{h \to 0} \frac{I(x+h) - I(x)}{h} \quad \textbf{...(2)}$$

Uit **(1)** en **(2)** volgt dat $I'(x) = \pi \cdot (f(x))^2$, dus I is een primitieve van $\pi \cdot (f(x))^2$.

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f de x-as en de lijnen $x = a$ en $x = b$. De inhoud van het **omwentelingslichaam** dat ontstaat als je V wentelt om de x-as is dus te noteren met de integraal $\displaystyle\int_a^b \pi(f(x))^2\,\mathrm{d}x = \pi \int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x$.

11

Het vlakdeel V ligt boven de x-as en wordt ingesloten door de grafiek van de functie f, de x-as en de lijnen $x = a$ en $x = b$.
De inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as is $I(L) = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$.

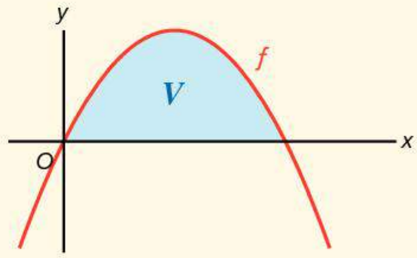


Voorbeeld

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = 4x - x^2$ en de x-as.
Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.

Uitwerking

$f(x) = 0$ geeft $4x - x^2 = 0$
$x(4 - x) = 0$
$x = 0 \vee x = 4$

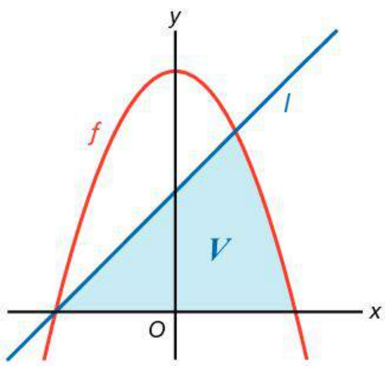


$$I(L) = \pi \int_0^4 (4x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^4 (16x^2 - 8x^3 + x^4) \, dx =$$

$$\pi \left[5\tfrac{1}{3}x^3 - 2x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 \right]_0^4 = \pi \left(5\tfrac{1}{3} \cdot 4^3 - 2 \cdot 4^4 + \tfrac{1}{5} \cdot 4^5 - 0 \right) = 34\tfrac{2}{15}\pi$$

41 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = 9 - x^2$ en de x-as.
Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.

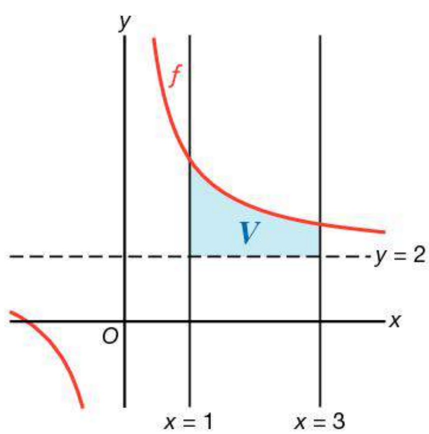
42 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = 4 - x^2$, de lijn l: $y = x + 2$ en de x-as.
Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.



figuur 11.18

43 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x}$ en de lijnen $y = 2$, $x = 1$ en $x = 3$.
Het lichaam L ontstaat door V om de lijn $y = 2$ te wentelen.
Het vlakdeel V wordt 2 omlaag geschoven. Hierdoor ontstaat het vlakdeel W.
Het vlakdeel W wordt ingesloten door de x-as, de lijnen $x = 1$ en $x = 3$ en de grafiek van de functie g.

a Geef het functievoorschrift van g.
b Bereken exact de inhoud van het lichaam M dat ontstaat als W wentelt om de x-as en licht toe dat je hiermee ook de inhoud van L hebt berekend.



figuur 11.19

11

A 44 Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = \frac{x+1}{x}$ en de lijnen $y = 1$, $x = 1$ en $x = 4$ wentelt om

a de x-as

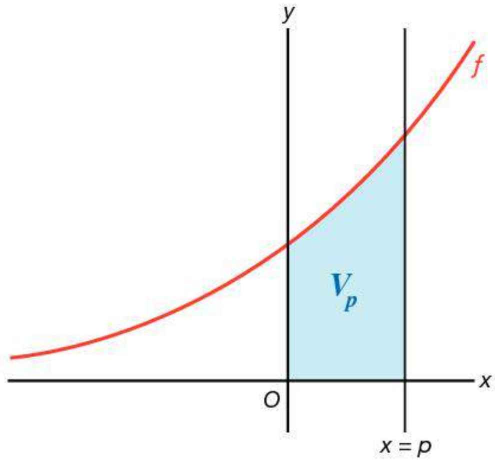
b de lijn $y = 1$.

A 45 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = \sqrt{x-2}$, de x-as en de lijn $x = 8$.
De lijn $x = a$ verdeelt V in de vlakdelen V_1 en V_2.
V_1 en V_2 wentelen om de x-as, zo ontstaan de lichamen L_1 en L_2.
Bereken exact voor welke a de inhouden van L_1 en L_2 gelijk zijn.

A 46 Het vlakdeel V_p wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = e^{\frac{1}{2}x+1}$, de x-as, de y-as en de lijn $x = p$ met $p > 0$.

a De oppervlakte van V_p is 2e.
Bereken p exact.

b Het vlakdeel V_p wentelt om de x-as. Zo ontstaat het lichaam L_p.
Bereken exact voor welke waarde van p de inhoud van L_p gelijk is aan $9\pi e^2$.



figuur 11.20

D 47 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = e^2 - e^x$, de x-as en de y-as.
Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V om de x-as wentelt.

O 48 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van $f(x) = x$ en $g(x) = \frac{1}{2}x$ en de lijnen $x = 1$ en $x = 3$. Het vlakdeel V wentelt om de x-as, zo ontstaat het lichaam L.

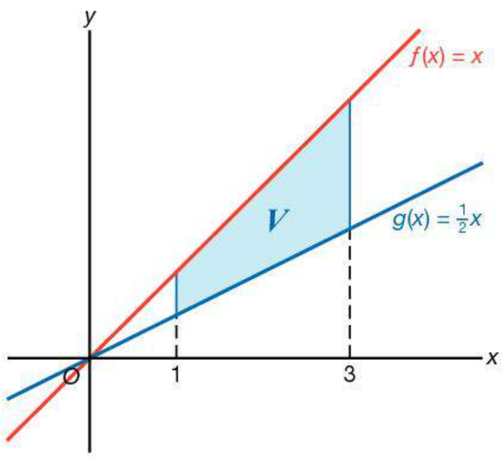
Er geldt $\pi\int_1^3 (f(x))^2\,dx = 8\frac{2}{3}\pi$ en $\pi\int_1^3 (g(x))^2\,dx = 2\frac{1}{6}\pi$.

a Geef de inhoud van L.

Jolien zegt $I(L) = \pi\int_1^3 (f(x) - g(x))^2\,dx$

en Irma zegt $I(L) = \pi\int_1^3 ((f(x))^2 - (g(x))^2)\,dx$.

b Onderzoek wie gelijk heeft.

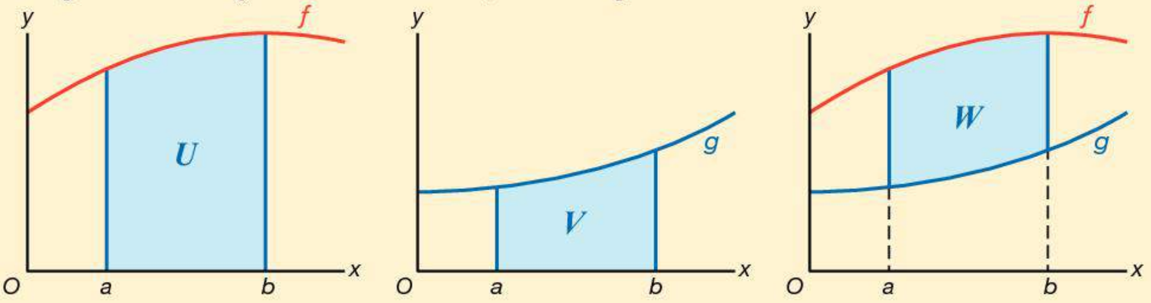


figuur 11.21

11

Theorie B Vlakdelen wentelen om de x-as

In figuur 11.22 zijn de vlakdelen U, V en W getekend.



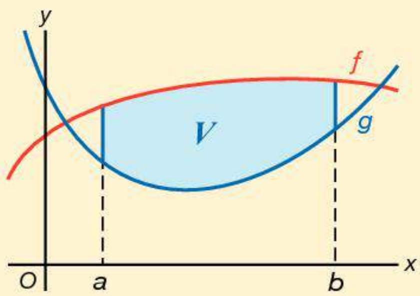
figuur 11.22

Het lichaam L ontstaat als U wentelt om de x-as, het lichaam M ontstaat als V wentelt om de x-as en het lichaam N ontstaat als W wentelt om de x-as.
Om de inhoud van N te berekenen neem je het verschil van de inhouden van L en M, dus $I(N) = I(L) - I(M) =$

$$\pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx - \pi \int_a^b (g(x))^2 \, dx = \pi \int_a^b ((f(x))^2 - (g(x))^2) \, dx.$$

Het vlakdeel V ligt boven de x-as en wordt ingesloten door de grafieken van de functies f en g, waarbij $f(x) \geq g(x)$, en de lijnen $x = a$ en $x = b$. De inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as is

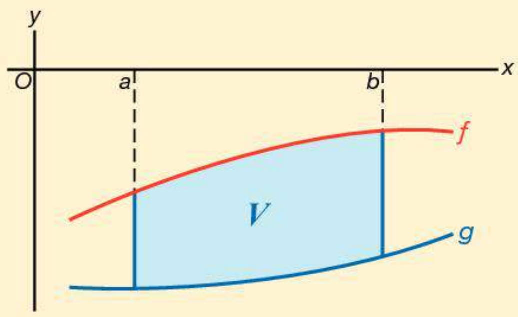
$$I(L) = \pi \int_a^b ((f(x))^2 - (g(x))^2) \, dx.$$



De inhoud van het lichaam dat ontstaat als het vlakdeel V in figuur 11.23 wentelt om de x-as is gelijk aan

$$\pi \int_a^b ((g(x))^2 - (f(x))^2) \, dx.$$

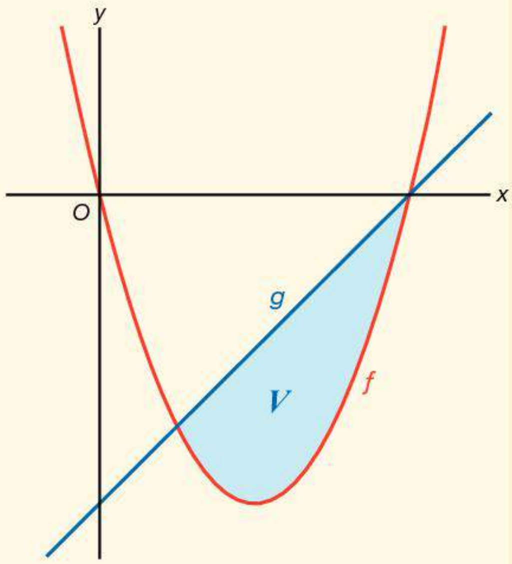
Je neemt de 'buitenste' inhoud min de 'binnenste' inhoud.



figuur 11.23

Voorbeeld

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van $f(x) = x^2 - 4x$ en $g(x) = x - 4$.
Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.



figuur 11.24

Uitwerking

$f(x) = g(x)$ geeft $x^2 - 4x = x - 4$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$(x-1)(x-4) = 0$

$x = 1 \vee x = 4$

$$I(L) = \pi \int_1^4 ((f(x))^2 - (g(x))^2)\,dx$$

$$= \pi \int_1^4 ((x^2 - 4x)^2 - (x-4)^2)\,dx$$

$$= \pi \int_1^4 (x^4 - 8x^3 + 16x^2 - (x^2 - 8x + 16))\,dx$$

$$= \pi \int_1^4 (x^4 - 8x^3 + 15x^2 + 8x - 16)\,dx$$

$$= \pi\left[\tfrac{1}{5}x^5 - 2x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 16x\right]_1^4$$

$$= \pi\left(\tfrac{1}{5}\cdot 4^5 - 2\cdot 4^4 + 5\cdot 4^3 + 4\cdot 4^2 - 16\cdot 4 - \left(\tfrac{1}{5} - 2 + 5 + 4 - 16\right)\right)$$

$$= \pi\left(12\tfrac{4}{5} - -8\tfrac{4}{5}\right) = 21\tfrac{3}{5}\pi$$

49 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = \frac{1}{2}x$.
Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.

50 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de y-as en de grafieken van $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ en $g(x) = 2e - e^{\frac{1}{2}x}$.
Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.

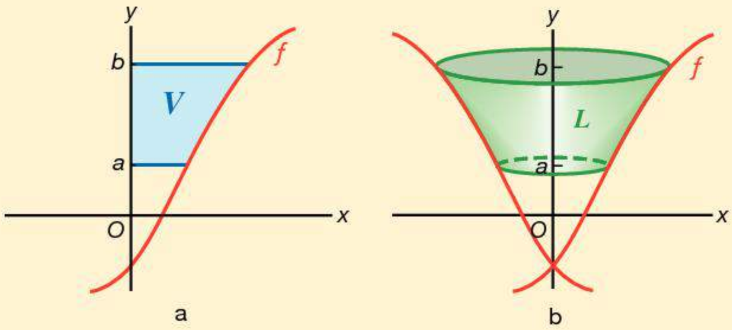
A 51 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van $f(x) = 6x - x^2$ en $g(x) = x$.
Het lichaam L ontstaat als V wentelt om de x-as.

a Bereken exact de inhoud van L.

b De lijn $x = p$ verdeelt V in de delen V_1 en V_2. Door V_1 en V_2 te wentelen om de x-as ontstaan de lichamen L_1 en L_2.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig voor welke p de inhouden van L_1 en L_2 gelijk zijn.

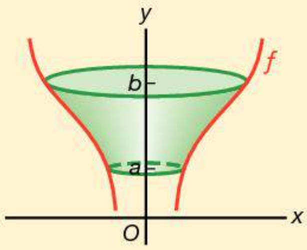
Theorie C Wentelen om de y-as

Het vlakdeel V in figuur 11.25a wentelt om de y-as. Zo ontstaat het lichaam L in figuur 11.25b. Om de inhoud van L te berekenen ga je net zo te werk als bij het wentelen om de x-as. Je krijgt dus dat voor de inhoudsfunctie I geldt $I(y+h) - I(y) \approx \pi \cdot x^2 \cdot h$ en hieruit volgt dat I gelijk is aan $\pi \int_a^b x^2\,dy$.



figuur 11.25

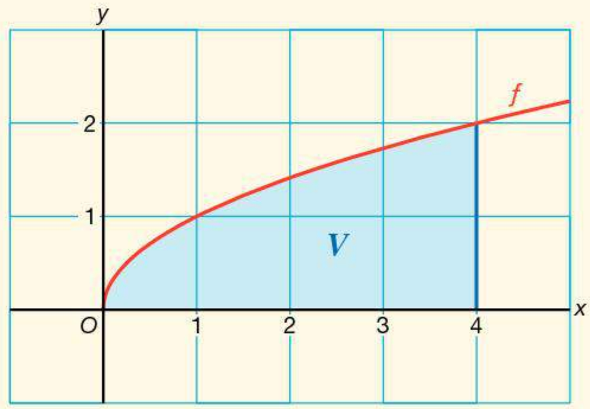
Het vlakdeel V ligt rechts van de y-as en wordt ingesloten door de grafiek van de functie f, de y-as en de lijnen $y = a$ en $y = b$.
De inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V om de y-as wentelt is $I(L) = \pi \int_a^b x^2\,dy$.



Voorbeeld

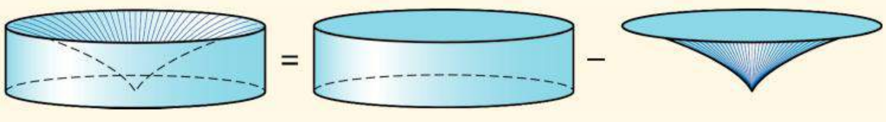
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$, de x-as en de lijn $x = 4$. Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de y-as.

Aanpak
Gebruik dat L een cilinder is waaruit een omwentelingslichaam is weggelaten.



figuur 11.26

Uitwerking



$$I(L) = I(\text{cilinder}) - \pi \int_0^{f(4)} x^2\,dy$$

$$y = \sqrt{x} \text{ geeft } x^2 = y^4 \text{, dus } I(L) = \pi \cdot 4^2 \cdot 2 - \pi \int_0^2 y^4\,dy = 32\pi - \pi\left[\tfrac{1}{5}y^5\right]_0^2 = 32\pi - \pi\left(\tfrac{32}{5} - 0\right) = 25\tfrac{3}{5}\pi$$

52 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = \sqrt{2x - 4}$, de x-as, de y-as en de lijn $y = 3$.

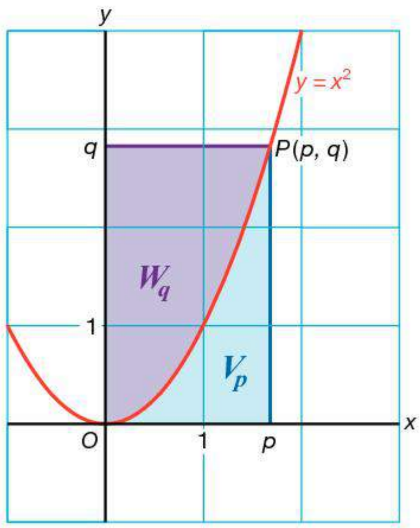
a Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de y-as.

b Bereken exact de inhoud van het lichaam M dat ontstaat als V wentelt om de x-as.

53 Gegeven zijn de parabool $y = x^2$ en het punt $P(p, q)$ op de parabool.
Het vlakdeel V_p wordt ingesloten door de parabool, de x-as en de lijn $x = p$.
Het vlakdeel W_q wordt ingesloten door de parabool, de y-as en de lijn $y = q$.

a Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als W_4 om de y-as wentelt.

b Bij wenteling van V_p om de x-as ontstaat het lichaam L_p en bij wenteling van W_q om de y-as ontstaat het lichaam M_q.
Bereken voor welke p en q de inhouden van L_p en M_q gelijk zijn.



figuur 11.27

A 54 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{2x + 6}$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de y-as.
Bereken exact de inhoud

a van het lichaam L dat ontstaat als V om de x-as wentelt

b van het lichaam M dat ontstaat als V om de y-as wentelt.

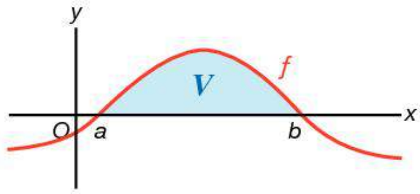
Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f en de lijnen $x = -3$ en $y = 4$.

c Bereken exact de inhoud van het lichaam N dat ontstaat als W wentelt om de lijn $x = -3$.

11

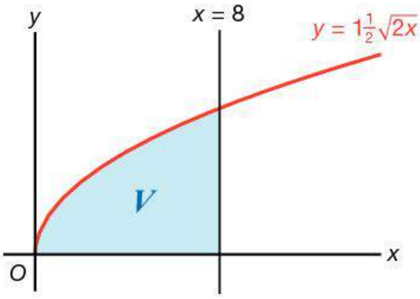
Terugblik

Inhoud van omwentelingslichamen



Door het vlakdeel V in de figuur hiernaast te wentelen om de x-as ontstaat het lichaam L.

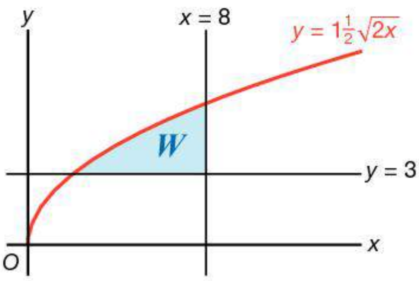
De inhoud van L is $I(L) = \pi \int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x$.



Het lichaam K ontstaat door het vlakdeel V, ingesloten door de grafiek van $f(x) = 1\frac{1}{2}\sqrt{2x}$, de x-as en de lijn $x = 8$ te wentelen om de x-as.

$$I(K) = \pi \int_0^8 \left(1\tfrac{1}{2}\sqrt{2x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_0^8 4\tfrac{1}{2}x\,\mathrm{d}x = \pi\left[2\tfrac{1}{4}x^2\right]_0^8 = 144\pi$$

Wentelen om een horizontale lijn



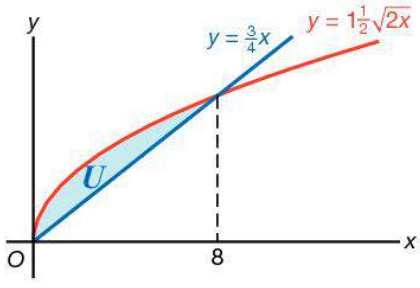
Het lichaam L ontstaat door het vlakdeel W dat ingesloten wordt door de grafiek van $f(x) = 1\frac{1}{2}\sqrt{2x}$, de lijn $y = 3$ en de lijn $x = 8$ te wentelen om de lijn $y = 3$.
Je krijgt $I(L)$ door het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van $g(x) = 1\frac{1}{2}\sqrt{2x} - 3$, de x-as en de lijn $x = 8$ te wentelen om de x-as.
Omdat $1\frac{1}{2}\sqrt{2x} = 3$ geeft $x = 2$ krijg je

$$I(L) = \pi \int_2^8 \left(1\tfrac{1}{2}\sqrt{2x} - 3\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_2^8 \left(4\tfrac{1}{2}x - 9\sqrt{2x} + 9\right)\mathrm{d}x$$

$$= \pi\left[2\tfrac{1}{4}x^2 - 9 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3}(2x)^{1\frac{1}{2}} + 9x\right]_2^8$$

$$= \pi\left[2\tfrac{1}{4}x^2 - 6x\sqrt{2x} + 9x\right]_2^8 = 21\pi.$$

Vlakdelen wentelen om de x-as



Door het vlakdeel U in de figuur hiernaast te wentelen om de x-as ontstaat het lichaam M. De inhoud van M is

$$I(M) = \pi \int_0^8 \left(\left(1\tfrac{1}{2}\sqrt{2x}\right)^2 - \left(\tfrac{3}{4}x\right)^2\right)\mathrm{d}x = \pi \int_0^8 \left(4\tfrac{1}{2}x - \tfrac{9}{16}x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$= \pi\left[\,2\tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{3}{16}x^3\,\right]_0^8 = 48\pi.$$

Wentelen om de y-as

Door het vlakdeel U hierboven te wentelen om de y-as ontstaat het lichaam N.

$y = \frac{3}{4}x$ geeft $x = 1\frac{1}{3}y$ en $y = 1\frac{1}{2}\sqrt{2x}$ geeft $2x = \left(\frac{2}{3}y\right)^2$ ofwel $x = \frac{2}{9}y^2$.

Omdat de snijpunten van de grafieken (0, 0) en (8, 6) zijn, krijg je

$$I(N) = \pi \int_0^6 \left(\left(1\tfrac{1}{3}y\right)^2 - \left(\tfrac{2}{9}y^2\right)^2\right)\mathrm{d}y = \pi \int_0^6 \left(\tfrac{16}{9}y^2 - \tfrac{4}{81}y^4\right)\mathrm{d}y = \pi\left[\tfrac{16}{27}y^3 - \tfrac{4}{405}y^5\right]_0^6 = 51\tfrac{1}{5}\pi.$$

11.4 Toepassingen van integralen

O 55 De cirkel met middelpunt O en straal r heeft vergelijking $x^2 + y^2 = r^2$ ofwel $y^2 = r^2 - x^2$. Bij wentelen van deze cirkel om de x-as ontstaat een bol met straal r.
Toon aan dat de inhoud van deze bol $\frac{4}{3}\pi r^3$ is.

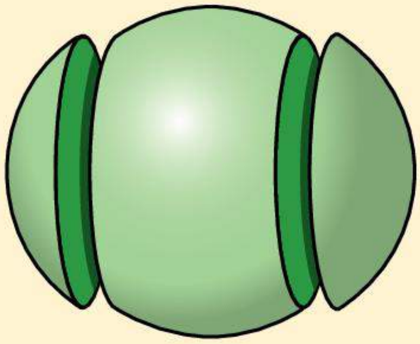
Theorie A Kegel en bol

In opgave 55 heb je gezien dat de inhoud van een bol $\frac{4}{3}\pi r^3$ is.

De inhoud van een bol met straal r is $I_{\text{bol}} = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Door een bol met een (plat) vlak te snijden, ontstaan twee **bolsegmenten**.
Snijd je een bol met twee evenwijdige vlakken, dan ontstaan twee bolsegmenten en een **bolschijf**. Zie figuur 11.28.

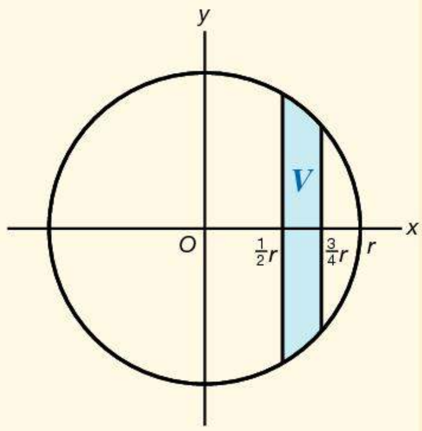
Met behulp van een integraal is een formule voor de inhoud van een bolsegment en van een bolschijf op te stellen.



figuur 11.28

Voorbeeld

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$ en de lijnen $x = \frac{1}{2}r$ en $x = \frac{3}{4}r$.
Stel de formule op van de inhoud van de bolschijf die ontstaat als V om de x-as wentelt.



figuur 11.29

Uitwerking

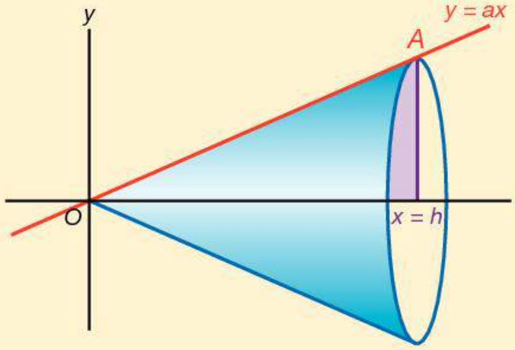
$$\left.\begin{array}{l} I = \pi \displaystyle\int_{\frac{1}{2}r}^{\frac{3}{4}r} y^2 \, \mathrm{d}x \\ x^2 + y^2 = r^2 \text{ dus } y^2 = r^2 - x^2 \end{array}\right\} I = \pi \int_{\frac{1}{2}r}^{\frac{3}{4}r} (r^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi\left[\left(r^2x - \tfrac{1}{3}x^3\right)\right]_{\frac{1}{2}r}^{\frac{3}{4}r}$$

$$= \pi\left(r^2 \cdot \tfrac{3}{4}r - \tfrac{1}{3} \cdot \left(\tfrac{3}{4}r\right)^3 - \left(r^2 \cdot \tfrac{1}{2}r - \tfrac{1}{3} \cdot \left(\tfrac{1}{2}r\right)^3\right)\right)$$

$$= \pi\left(\tfrac{3}{4}r^3 - \tfrac{9}{64}r^3 - \tfrac{1}{2}r^3 + \tfrac{1}{24}r^3\right) = \tfrac{29}{192}\pi r^3$$

11

In figuur 11.30 zie je dat een kegel een omwentelingslichaam is.
De kegel ontstaat door het vlakdeel V ingesloten door de lijn $y = ax$, de x-as en de lijn $x = h$ om de x-as te wentelen.
Met behulp van integraalrekening is een formule van de inhoud van deze kegel op te stellen.



figuur 11.30

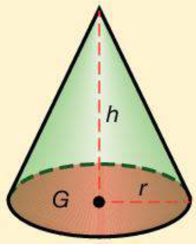
$$I = \pi \int_0^h (ax)^2\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^h a^2x^2\,\mathrm{d}x = \pi\left[\tfrac{1}{3}a^2x^3\right]_0^h = \tfrac{1}{3}\pi a^2h^3$$

Uit $x_A = h$ volgt $y_A = ah$, dus de straal r van de grondcirkel is ah.

$$\left.\begin{array}{l} I = \tfrac{1}{3}\pi a^2h^3 = \tfrac{1}{3}\pi \cdot a^2h^2 \cdot h \\ r = ah \end{array}\right\} I = \tfrac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$$

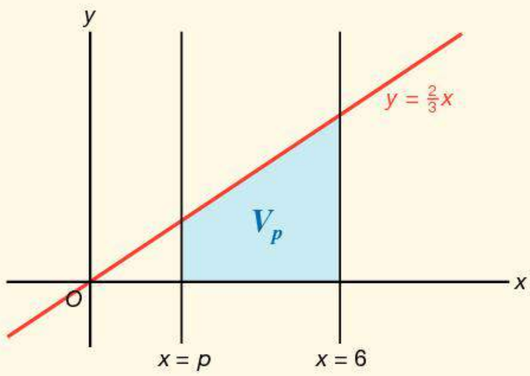
Omdat πr^2 de oppervlakte is van het grondvlak G van de kegel, is de formule ook te schrijven als $I = \tfrac{1}{3}Gh$.

De inhoud van een kegel met straal grondcirkel r, oppervlakte grondvlak G en hoogte h is $I_{\text{kegel}} = \tfrac{1}{3}Gh = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h$.



Voorbeeld

Het vlakdeel V_p wordt ingesloten door de lijn $y = \tfrac{2}{3}x$, de x-as en de lijnen $x = p$ en $x = 6$ met $0 < p < 6$.
Door V_p te wentelen om de x-as ontstaat de afgeknotte kegel K_p.
Bereken met behulp van integreren voor welke p de inhoud van K_p gelijk is aan 24π.



figuur 11.31

Uitwerking

$$I_p = \pi \int_p^6 \left(\tfrac{2}{3}x\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_p^6 \tfrac{4}{9}x^2\,\mathrm{d}x = \pi\left[\tfrac{4}{27}x^3\right]_p^6$$

$$= \pi\left(\tfrac{4}{27} \cdot 6^3 - \tfrac{4}{27}p^3\right) = \pi\left(32 - \tfrac{4}{27}p^3\right)$$

$I_p = 24\pi$ geeft $\pi\left(32 - \tfrac{4}{27}p^3\right) = 24\pi$

$$32 - \tfrac{4}{27}p^3 = 24$$

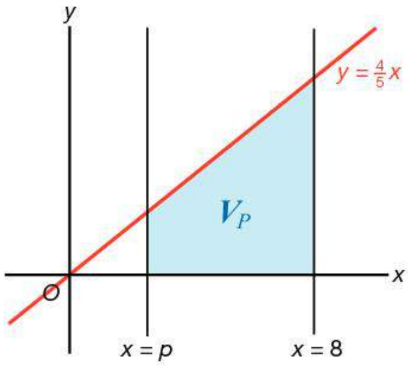
$$-\tfrac{4}{27}p^3 = -8$$

$$p^3 = 54$$
$$p = \sqrt[3]{54}$$

11

R 56 Zie het voorbeeld.
Bereken p met behulp van de formule van de inhoud van een kegel.

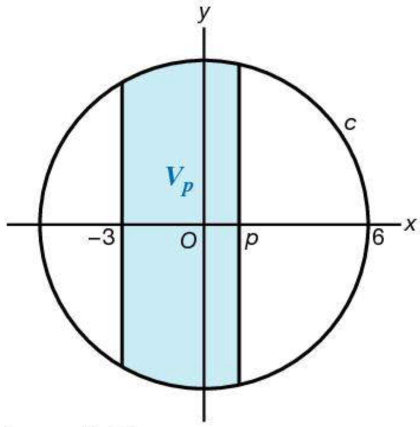
57 Het vlakdeel V_p wordt ingesloten door de lijn $y = \frac{4}{5}x$, de x-as en de lijnen $x = p$ en $x = 8$ met $0 < p < 8$. Zie figuur 11.32.
Door V_p te wentelen om de x-as ontstaat de afgeknotte kegel K_p.
Bereken met behulp van integreren voor welke p de inhoud van K_p gelijk is aan 100π.



figuur 11.32

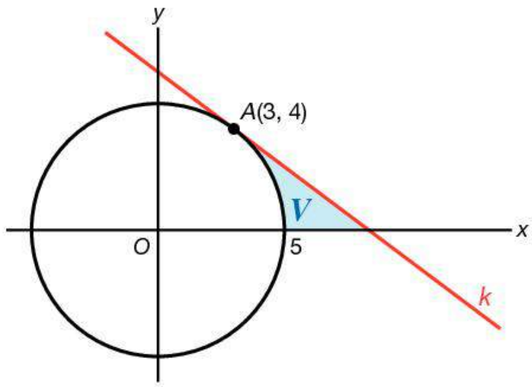
58 Het vlakdeel V ligt rechts van de lijn $x = \frac{1}{3}r$ en wordt ingesloten door de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$ en de lijn $x = \frac{1}{3}r$.
Stel de formule op van de inhoud van het bolsegment dat ontstaat als V om de x-as wentelt.

A 59 De bol B ontstaat als de cirkel c: $x^2 + y^2 = 36$ wentelt om de x-as.
Het vlakdeel V_p wordt ingesloten door c en de lijnen $x = -3$ en $x = p$. Zie figuur 11.33.
De bolschijf S_p ontstaat als V_p om de x-as wentelt.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig voor welke p de inhoud van S_p gelijk is aan de helft van de inhoud van B.



figuur 11.33

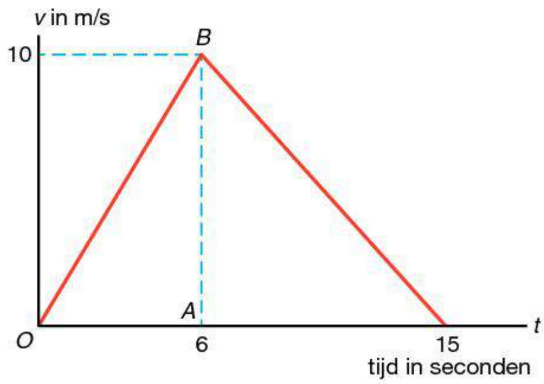
A 60 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de cirkel c: $x^2 + y^2 = 25$, de x-as en de lijn k: $y = -\frac{3}{4}x + 6\frac{1}{4}$. Zie figuur 11.34.
Door V te wentelen om de x-as ontstaat het lichaam L.
Bereken exact de inhoud van L.



figuur 11.34 De lijn k raakt de cirkel in het punt $A(3, 4)$.

O 61 In figuur 11.35 is van een voorwerp de snelheid v in m/s uitgezet tegen de tijd t in seconden.

- **a** Bereken de gemiddelde snelheid gedurende de eerste zes seconden. Hoeveel meter wordt gedurende deze zes seconden afgelegd?
- **b** Licht toe: de oppervlakte van driehoek OAB geeft de afgelegde afstand gedurende de eerste zes seconden.
- **c** Bereken de afgelegde afstand op het interval $[0, 15]$.



figuur 11.35

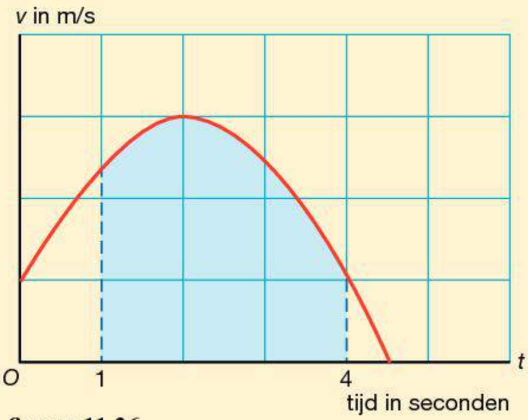
Theorie B Afgelegde weg, snelheid en versnelling

Bij een tijd-afstandformule is de formule van de snelheid v de afgeleide van s. Dus $s'(t) = v(t)$.
Hieruit volgt dat s een primitieve is van v en dat de afgelegde afstand gedurende een tijdsinterval gelijk is aan de bijbehorende oppervlakte onder de grafiek van v.
In figuur 11.36 is van een voorwerp de snelheid v in m/s uitgezet tegen de tijd t in seconden.

Met de integraal $\int_1^4 v(t)\,\mathrm{d}t$ bereken je de afgelegde afstand op het interval [1, 4].
Is gegeven dat $v(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t + 1$, dan krijg je

afgelegde afstand $= \int_1^4 \left(-\frac{1}{2}t^2 + 2t + 1\right) \mathrm{d}t =$

$\left[-\frac{1}{6}t^3 + t^2 + t\right]_1^4 = \left(-\frac{1}{6} \cdot 4^3 + 4^2 + 4\right) - \left(-\frac{1}{6} \cdot 1^3 + 1^2 + 1\right) = 7\frac{1}{2}.$



figuur 11.36

Bij de formule $v(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t + 1$ hoort de formule van de afgelegde afstand $s(t) = -\frac{1}{6}t^3 + t^2 + t + c$.
Is gegeven dat $s(1) = 5$, dan is hiermee c te berekenen.
Merk op dat je voor het berekenen van de afgelegde afstand op een tijdsinterval de integratieconstante c niet hoeft te weten. Voor het berekenen van de afgelegde afstand op een tijdsinterval kun je dus ook $c = 0$ nemen.

Is de formule van de snelheid v van een voorwerp bekend, dan krijg je de formule van de versnelling a door de afgeleide van v te nemen. Dus $a(t) = v'(t) = s''(t)$. Hieruit volgt dat v een primitieve is van a en dat de toename van de snelheid gedurende een tijdsinterval gelijk is aan de bijbehorende oppervlakte onder de grafiek van a.

Is gegeven $a(t) = t + \mathrm{e}^t$ met t in seconden en a in m/s^2, dan is $v(t) = \frac{1}{2}t^2 + \mathrm{e}^t + c_1$. Is verder gegeven dat $v(0) = 0$, dan is $0 + 1 + c_1 = 0$, dus $c_1 = -1$, zodat de formule van de snelheid wordt $v(t) = \frac{1}{2}t^2 + \mathrm{e}^t - 1$.
Primitiveren hiervan geeft de formule van de afgelegde weg, dus $s(t) = \frac{1}{6}t^3 + \mathrm{e}^t - t + c_2$.
Met het extra gegeven dat $s(0) = 0$ krijg je $0 + 1 - 0 + c_2 = 0$, dus $c_2 = -1$.
Dus de formule van de afgelegde weg is $s(t) = \frac{1}{6}t^3 + \mathrm{e}^t - t - 1$.
De afgelegde afstand gedurende de vijfde seconde is te berekenen met $s(5) - s(4) = \frac{1}{6} \cdot 5^3 + \mathrm{e}^5 - 5 - 1 - \left(\frac{1}{6} \cdot 4^3 + \mathrm{e}^4 - 4 - 1\right) \approx 102{,}98$ m.
Merk weer op dat voor het berekenen van een afgelegde afstand de waarde van de integratieconstante niet van belang is.

11

Voorbeeld

Een voorwerp heeft op $t = 0$ een snelheid van 4 m/s en ondergaat vanaf $t = 0$ gedurende 10 seconden een versnelling. De versnelling neemt tussen $t = 0$ en $t = 10$ lineair af van 5 m/s^2 tot 0 m/s^2.
Hoeveel meter wordt gedurende deze 10 seconden afgelegd?

Uitwerking
Stel $a(t) = mt + n$.
$m = \dfrac{a(10) - a(0)}{10 - 0} = \dfrac{0 - 5}{10} = -\frac{1}{2}$
$a(t) = -\frac{1}{2}t + n$ en $a(0) = 5$ geeft $a(t) = -\frac{1}{2}t + 5$
$a(t) = -\frac{1}{2}t + 5$ en $v(0) = 4$ geeft $v(t) = -\frac{1}{4}t^2 + 5t + 4$
$v(t) = -\frac{1}{4}t^2 + 5t + 4$ geeft $s(t) = -\frac{1}{12}t^3 + 2\frac{1}{2}t^2 + 4t + c$
Neem $c = 0$.
De afgelegde afstand gedurende de eerste 10 seconden is
$s(10) - s(0) = -\frac{1}{12} \cdot 10^3 + 2\frac{1}{2} \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 - 0 = 206\frac{2}{3}$ m.

R 62 Zie het voorbeeld.
Je kunt de afgelegde afstand gedurende de eerste 10 seconden ook berekenen met een integraal.
Doe dit.

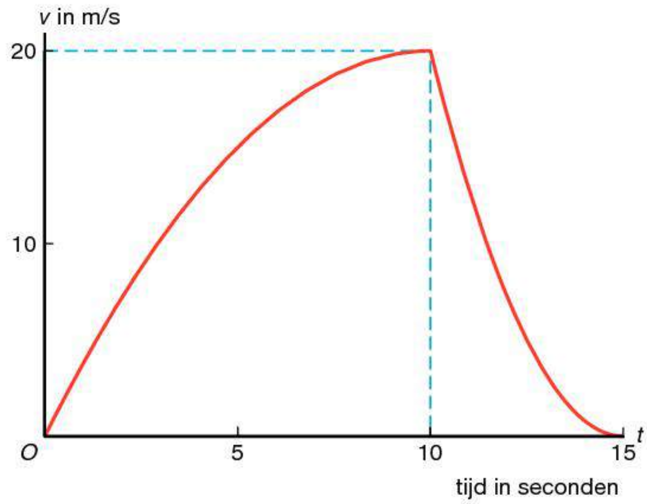
63 Een voorwerp met een snelheid van 1 m/s ondergaat vanaf $t = 0$ gedurende 20 seconden een versnelling. De versnelling neemt tussen $t = 0$ en $t = 20$ lineair toe van 0 m/s^2 tot 5 m/s^2.
Hoeveel meter wordt gedurende deze 20 seconden afgelegd?

64 Een voorwerp in rust ondergaat vanaf $t = 0$ gedurende 6 seconden een versnelling die gegeven is door $a(t) = -t^2 + 6t$.
Hierin is a in m/s^2 en t in seconden met $0 \leq t \leq 6$.
a Bereken de snelheid op $t = 6$.
b Bereken de afgelegde afstand gedurende deze 6 seconden.

Na $t = 6$ verandert de snelheid niet meer.
c Hoeveel meter is in totaal afgelegd op $t = 10$?
d Bereken voor welke t in totaal 500 m is afgelegd.

65 Bij een botsproef rijdt een auto met een snelheid van 54 km/uur tegen een betonblok. Door de kreukelzone van de auto en het gebruik van de veiligheidsgordel en een airbag is de remweg van de bestuurder 75 cm. Neem aan dat tijdens de botsing de versnelling (vertraging) constant is.
a Bereken hoe lang de botsing duurt.
b Bereken in m/s^2 de versnelling tijdens de botsing. Hoeveel keer zo groot als de versnelling van de zwaartekracht g is dit? Neem g = 10 m/s^2.

66 In figuur 11.37 is de snelheid van een auto in m/s uitgezet tegen de tijd in seconden. Gedurende de eerste 10 seconden trekt de auto op vanuit stilstand. Bij dit gedeelte van de grafiek hoort de formule $v(t) = -0{,}2t^2 + 4t$. Vanaf $t = 10$ remt de auto af. De auto komt tot stilstand op $t = 15$. Bij het tweede gedeelte van de grafiek hoort de formule $v(t) = 0{,}8t^2 - 24t + 180$.



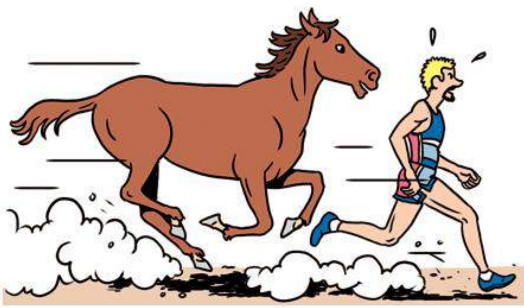
figuur 11.37

a Bereken algebraïsch de totale afstand die de auto gedurende deze 15 seconden aflegt.

b Met behulp van het antwoord van vraag a is de gemiddelde snelheid van de auto gedurende de 15 seconden te berekenen.
Er zijn twee tijdstippen waarop de snelheid van de auto gelijk is aan deze gemiddelde snelheid.
Bereken deze tijdstippen in twee decimalen nauwkeurig.

c Bereken in één decimaal nauwkeurig na hoeveel seconden de auto 100 meter heeft afgelegd.

A 67 Bij een wedstrijd over 100 meter van een atleet tegen een paard hebben we te maken met het volgende model.
De atleet versnelt de eerste 3,5 seconden volgens de formule $a(t) = -\frac{12}{7}t + 6$.
Na 3,5 seconden verandert zijn snelheid niet meer.
Het paard versnelt de eerste 6 seconden volgens de formule $a(t) = -\frac{2}{3}t + 4$. Na 6 seconden verandert de snelheid van het paard niet meer.
In de formules is t de tijd in seconden en a de versnelling in m/s^2.



a Wat is de maximale voorsprong van de atleet op het paard? Geef het antwoord in dm nauwkeurig.

b Wie wint de wedstrijd? Met hoeveel seconden voorsprong? Geef het antwoord in seconden in twee decimalen nauwkeurig.

11

Informatief Atleet versus paard

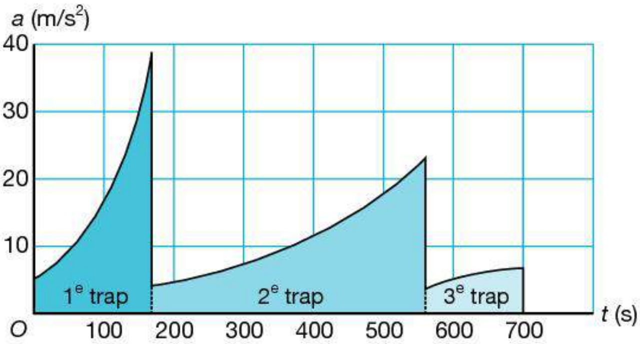
Jamie Baulch is een voormalige Britse sprinter die was gespecialiseerd in de 400 meter. Zijn persoonlijk record op de 100 meter sprint is met 10,51 seconden ook zeer verdienstelijk. In juli 2010 nam Jamie het op de 100 meter op tegen het paard Peopleton Brook. Kort na de start had Jamie een flinke voorsprong, maar na ongeveer 60 meter raasde het paard hem voorbij. In 1948 deed viervoudig olympisch kampioen Jesse Owens het beter dan Baulch: hij won wél van een paard.

A 68 Een parachutist opent op 800 meter hoogte zijn parachute. Daardoor ondergaat hij een versnelling (vertraging) die gegeven wordt door de formule $a(t) = -4\,e^{-0,1t}$. Hierin is t de tijd in seconden met $t = 0$ op het moment dat de parachute wordt geopend en a de versnelling in m/s^2. Op $t = 3$ is zijn snelheid 32 m/s.

a Bereken de snelheid van de parachutist op het moment dat de parachute wordt geopend.

b Met welke snelheid komt de parachutist op de grond?

A 69 De Saturnus V-raket die de Apollo's naar de maan brachten bestond uit drie trappen.
De eerste trap had een hoogte van 42 m, een diameter van 10 m en een stuwkracht van maar liefst 35 miljoen newton.
Van de tweede trap was de hoogte 25 m en was de stuwkracht 5,2 miljoen newton.
Deze twee trappen gaven de Apollo een enorme versnelling. Zie figuur 11.38.



figuur 11.38

De eerste trap werkt 170 seconden en wordt dan elke seconde 12 000 kg lichter. De formule die bij de versnelling gedurende deze 170 seconden hoort is $a(t) = 5\,e^{0,012t}$ met t in seconden en a in m/s^2.
De tweede trap werkt tussen $t = 170$ en $t = 560$.
De formule die bij dit gedeelte van de grafiek hoort is $a(t) = 4\,e^{0,0045(t - 170)}$.

a Bereken in km/uur de snelheid van de Apollo na 170 seconden. Hoeveel kilometer heeft de Apollo dan afgelegd?

b Bereken de snelheid en de afgelegde afstand van de Apollo op $t = 560$.

O 70 Gegeven is de cirkel c: $x^2 + y^2 = 9$.
Bij het berekenen van de oppervlakte van c met een integraal krijg je te maken met de primitieve van de functie $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

a Licht dit toe.

b Licht toe dat je geen primitieve kunt berekenen van f.

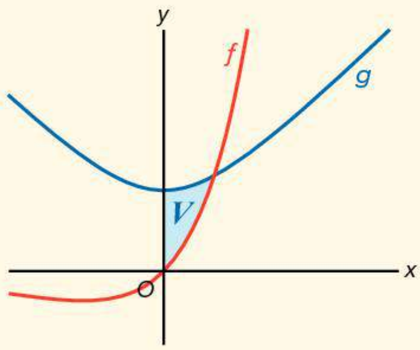
Theorie C Integralen numeriek benaderen

Van sommige functies kun je geen primitieve berekenen. Ook komt het voor dat je de grenzen van een integraal alleen maar kunt berekenen met de GR. In deze situaties maak je gebruik van een optie van de GR waarmee je integralen kunt berekenen. Je begrijpt dat je dan benaderde antwoorden krijgt.

[▶ GR] Neem de module **Integreren** door.

Voorbeeld

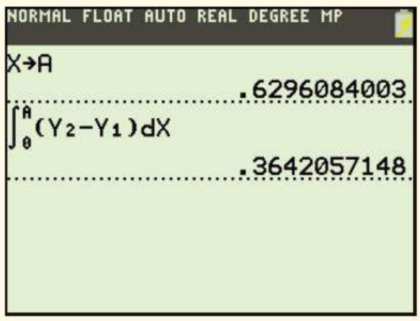
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van $f(x) = x\,\mathrm{e}^x$ en $g(x) = \sqrt{x^2+1}$ en de y-as.
Bereken de oppervlakte van V in drie decimalen nauwkeurig.



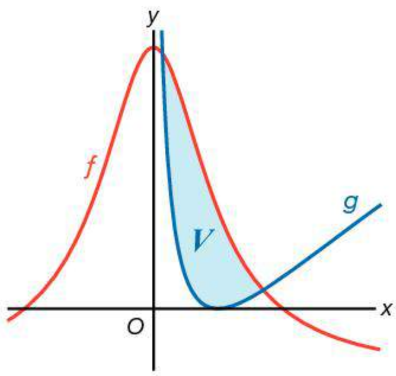
figuur 11.39

Uitwerking
Voer in $y_1 = x\,\mathrm{e}^x$ en $y_2 = \sqrt{x^2+1}$.
Intersect geeft $x = 0{,}6296...$
De optie fnInt (TI) of $\int \mathrm{d}x$ (Casio) geeft

$$O(V) = \int_0^{0{,}6296...} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x \approx 0{,}364.$$



71 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{x^2 + 1}$ en $g(x) = \ln^2(x)$. Zie figuur 11.40.
Bereken de oppervlakte van V in twee decimalen nauwkeurig.



figuur 11.40

72 Gegeven zijn de functies $f(x) = 10x^2\,\mathrm{e}^x$ en $g(x) = -x + 2$.
De grafieken van f en g sluiten de vlakdelen V_1 en V_2 in.
Bereken in drie decimalen nauwkeurig de som van de oppervlakten van deze vlakdelen.

73 Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$ met $D_f = [0, \pi]$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as.
Onderzoek of de lijn $y = \frac{1}{4}x$ het vlakdeel V in twee delen met gelijke oppervlakte verdeelt.

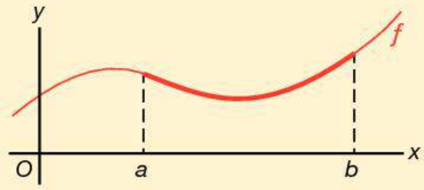
74 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = 2\ln(x) - \ln^2(x)$ en de x-as.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.

A 75 Gegeven zijn de functies $f(x) = 10 - x^2$ en $g(x) = 2^{x+2}$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van f en g.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig de inhoud van
a het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as
b het lichaam M dat ontstaat als V wentelt om de lijn $y = 10$.

Theorie D Booglengte

In het voorbeeld en de daarop volgende opgaven wordt de volgende formule gebruikt. Deze formule bewijs je in opgave 81.

De lengte van de grafiek van f tussen $x = a$ en $x = b$ is
$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$



Je hoeft deze formule niet uit het hoofd te leren. Bij het schoolexamen en het centrale examen wordt deze formule gegeven als je hem nodig hebt.

Voorbeeld

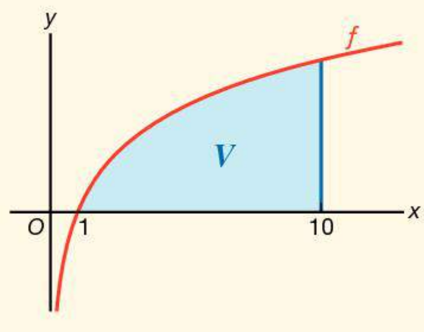
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = \ln(x)$, de x-as en de lijn $x = 10$.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig de omtrek van V.

Uitwerking

$f(x) = \ln(x)$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

De optie fnInt (TI) of $\int \mathrm{d}x$ (Casio) geeft

$$\text{booglengte} = \int_1^{10} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = 9{,}417...$$



De omtrek van V is $(10 - 1) + \ln(10) + 9{,}417... \approx 20{,}72$.

11

76 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, de x-as en de lijn $x = 5$.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig de omtrek van V.

77 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = 2^x$, de x-as, de y-as en de lijn $x = 3$.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig de omtrek van V.

A 78 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ en de lijn $y = 5$.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig de omtrek van V.

A 79 De Akashi Kaikyo brug in Japan is een hangbrug. De torens van de brug staan 1990 meter uit elkaar en de toppen van de torens bevinden zich 283 meter boven het water. Het wegdek van de brug bevindt zich op 83 meter boven het water. Tussen de torens hangen twee kabels in de vorm van een parabool. Deze kabels hangen op het laagste punt 5 meter boven het wegdek.
Bereken de lengte van zo'n kabel. Geef je antwoord in meter nauwkeurig.

A 80 Een kabel hangt tussen twee 16 meter lange verticale palen die 40 meter uit elkaar staan. Bij deze kabel hoort de formule $y = 4(e^{0,062x} + e^{-0,062x})$.

a Op welke hoogte is de kabel aan de palen bevestigd? Geef je antwoord in dm nauwkeurig.

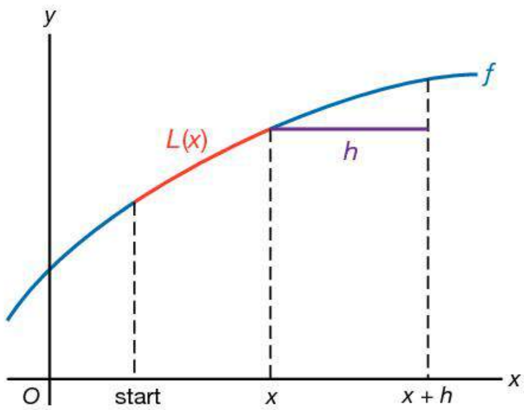
b Bereken de lengte van deze kabel in dm nauwkeurig.

c Aan deze kabel hangt een net dat overal precies tot op de grond hangt. Ga ervan uit dat de kabel zijn vorm behoudt.
Bereken in m^2 nauwkeurig de oppervlakte van het net.

D 81 Zie figuur 11.41 met de grafiek van f.
$L(x)$ is de lengte van de grafiek tussen start en x.
In deze opgave bewijs je dat $L(x)$ een primitieve is van $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$.
Begin als volgt

$$\frac{L(x+h) - L(x)}{h} \approx \frac{\sqrt{\ldots^2 + \ldots^2}}{h}$$

en maak het bewijs af.



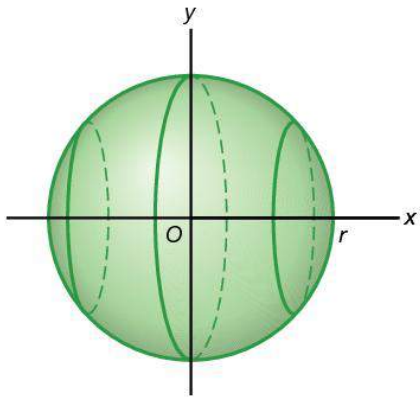
figuur 11.41

Terugblik

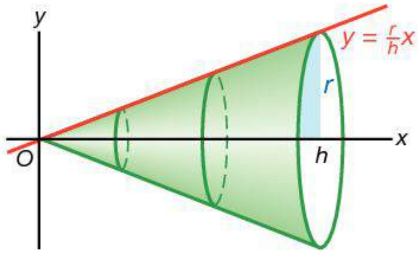
Bol en kegel

Door de cirkel c: $x^2 + y^2 = r^2$ te wentelen om de x-as ontstaat een bol met straal r.
De inhoud van de bol is $\frac{4}{3}\pi r^3$.
Door het vlakdeel ingesloten door de cirkel c, de y-as en de lijn $x = \frac{2}{3}r$ te wentelen om de x-as ontstaat een bolschijf.
De inhoud van deze bolschijf is

$$\pi\int_0^{\frac{2}{3}r} y^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{2}{3}r} (r^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi\Big[r^2x - \tfrac{1}{3}x^3\Big]_0^{\frac{2}{3}r} = \tfrac{46}{81}\pi r^3.$$



Door het vlakdeel ingesloten door de lijn $y = \dfrac{r}{h}x$, de x-as en de lijn $x = h$ te wentelen om de x-as ontstaat een kegel met straal grondcirkel r en hoogte h.
De inhoud van de kegel is $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

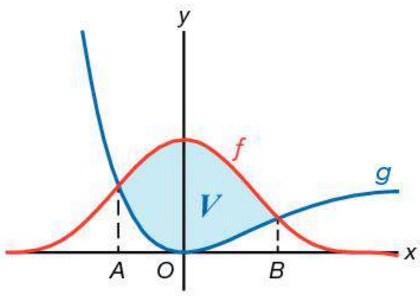


Afstand, snelheid en versnelling

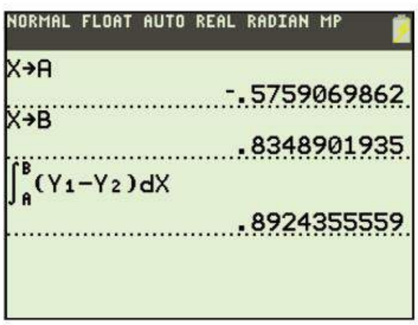
Voor de afgelegde afstand s, de snelheid v en de versnelling a geldt $a(t) = v'(t) = s''(t)$.
Dus v is een primitieve van a en s is een primitieve van v.
Is gegeven $a(t) = 5\mathrm{e}^{0,1t}$, dan krijg je $v(t) = 50\mathrm{e}^{0,1t} + c_1$.
Is verder gegeven dat $v(0) = 10$, dan is $50\mathrm{e}^0 + c_1 = 10$, dus $c_1 = -40$.
$v(t) = 50\mathrm{e}^{0,1t} - 40$ geeft $s(t) = 500\mathrm{e}^{0,1t} - 40t + c_2$
Is $s(0) = 0$ dan geldt $500\mathrm{e}^0 - 0 + c_2 = 0$, dus $c_2 = -500$.
Dit geeft $s(t) = 500\mathrm{e}^{0,1t} - 40t - 500$.

Integralen numeriek berekenen

Met de opties fnInt (TI) of $\int \mathrm{d}x$ (Casio) zijn integralen te benaderen.
In de figuur hiernaast zie je het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = \cos^3(x)$ en $g(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$.
Om de oppervlakte van V te benaderen, bereken je eerst met intersect de x-coördinaten van de snijpunten en zet deze in de geheugenplaatsen A en B.
Dit geeft $A = -0,5759...$ en $B = 0,8348...$
Daarna gebruik je de optie fnInt (TI) of $\int \mathrm{d}x$ (Casio).



Je krijgt $O(V) = \displaystyle\int_A^B (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \approx 0,892$.



De omtrek van V bereken je met

$$\int_A^B \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x + \int_A^B \sqrt{1 + (g'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Diagnostische toets

11.1 Primitieven en integralen

1 Primitiveer.

a $f(x) = \dfrac{2x+6}{x^2}$

b $f(x) = 3 \cdot 2^x$

c $f(x) = 6e^x + x^2$

d $f(x) = \ln(x^5)$

e $f(x) = {}^2\log(4x)$

f $f(x) = 3\sin(x) + 2\cos(x)$

2 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = 12x^2 - 4x^3$ en de x-as.

a Bereken algebraïsch de oppervlakte van V.

b De lijn $x = p$ verdeelt V in twee delen met gelijke oppervlakte. Bereken p in twee decimalen nauwkeurig.

3 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = \ln(2x)$, de x-as en de lijnen $x = p$ en $x = 2p$ met $p > \frac{1}{2}$.

a Neem $p = e$ en bereken exact de oppervlakte van V.

b Bereken in twee decimalen nauwkeurig voor welke waarde van p de oppervlakte van V gelijk is aan 5.

11.2 Oppervlakten

4 Bereken de primitieven.

a $f(x) = (2x+6)^5 + \dfrac{10}{(3x-1)^2}$

b $f(x) = (5x+2)^2 \cdot \sqrt{5x+2}$

c $f(x) = 4e^{2x+3}$

d $f(x) = 8 \cdot 2^{2x-1}$

e $f(x) = \ln(2x+3)$

f $f(x) = \dfrac{6}{2x+5}$

5 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$.

a Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f en de lijn $y = 5$.
Bereken exact de oppervlakte van V.

Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f en de lijnen $x = 1$, $x = p$ met $p > 1$ en $y = x$.

b Neem $p = e$ en bereken exact de oppervlakte van W.

c Bereken in twee decimalen nauwkeurig voor welke waarde van p de oppervlakte van W gelijk is aan 3.

11.3 Inhouden

6 Gegeven is de functie $f(x) = (2x - 6)^2$.

a Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f en de lijn $y = 4$.
Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.

b Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de y-as.
Bereken exact de inhoud van het lichaam K dat ontstaat als W wentelt om de y-as.

7 Gegeven is de functie $f(x) = e^x$. V is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as, de y-as en de lijn $x = 1$.
Bereken exact de inhoud L van het lichaam dat ontstaat als V wentelt om de lijn $y = e$.

11.4 Toepassingen van integralen

8 Een raket wordt verticaal gelanceerd. Omdat door verbranding van de brandstof de massa van de raket voortdurend afneemt wordt de versnelling bij gelijkblijvende stuwkracht steeds groter. Neem aan dat de versnelling gedurende de eerste 60 seconden na de lancering gelijkmatig toeneemt van 8 m/s^2 tot 68 m/s^2.

a Bereken exact welke hoogte de raket bereikt in deze 60 seconden.

Op $t = 60$ wordt de raketmotor uitgeschakeld. Vanaf dat moment werkt alleen de zwaartekracht van de aarde op de raket. Neem aan dat de raket geen wrijving ondervindt en dat g = 10 m/s^2 .

b Bereken exact de maximale hoogte van de raket.

9 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x) + 2}$ met domein $[0, \pi]$.
V is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as.

a Bereken in twee decimalen nauwkeurig de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.

b Bereken in twee decimalen nauwkeurig de omtrek van V.

10 Gegeven is de functie $f(x) = \ln(x - 1)$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as, de y-as en de lijn $y = 2$.

a Bereken in twee decimalen nauwkeurig de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.

b Bereken in twee decimalen nauwkeurig de inhoud van het lichaam M dat ontstaat als V wentelt om de lijn $y = 2$.

c Bereken exact de inhoud van het lichaam N dat ontstaat als V wentelt om de y-as.

d Bereken in twee decimalen nauwkeurig de omtrek van V.

Bij een pianotoon heb je te maken met een samenklank van een grondtoon en een aantal boventonen. Een grondtoon en boventonen zijn elementaire tonen. Een goede stemvork brengt een elementaire toon voort. Wanneer je zo'n elementaire toon grafisch weergeeft, zie je dat het om een zuivere sinusoïde gaat. Bij deze sinusoïde is vervolgens een formule op te stellen.

Wat leer je?

- Goniometrische formules gebruiken bij het oplossen van goniometrische vergelijkingen, bij herleidingen, bij het aantonen van symmetrie en bij primitiveren.
- Werken met bewegingsvergelijkingen bij eenparige cirkelbewegingen.
- Rekenen aan harmonische trillingen.
- Bij bewegingsvergelijkingen lengten, hoeken en snelheden berekenen.
- Rekenen aan banen van bewegende punten.

Goniometrische formules

12

Voorkennis Vergelijkingen, afgeleiden en primitieven bij goniometrie

Theorie A Goniometrische vergelijkingen

Je kunt de volgende typen goniometrische vergelijkingen algebraïsch oplossen.

- **$\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -1, 0, 1$**
  los je op met de eenheidscirkel.
  Zo geeft $\cos(A) = 0$ het rijtje oplossingen $A = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

  Dus $\cos\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = 0$ geeft $2x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ ofwel

  $2x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot \pi$ en dit geeft $x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$.

  Op $[0, 2\pi]$ zijn de oplossingen

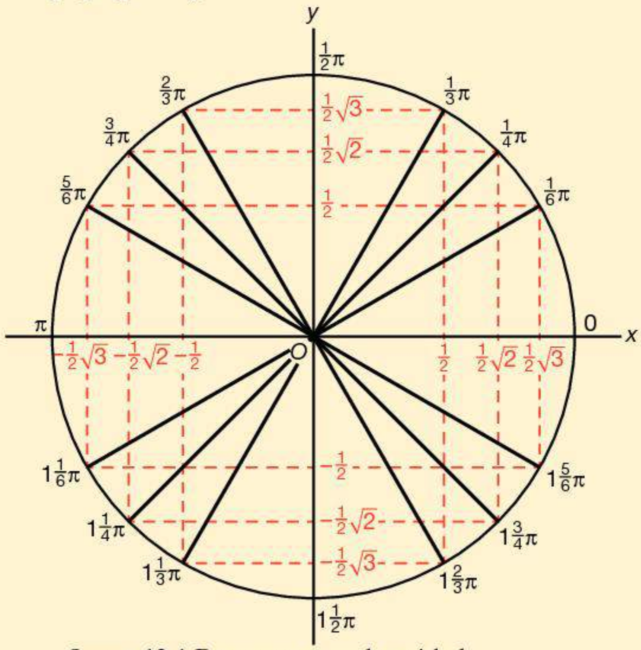
  $x = \frac{5}{12}\pi$, $x = \frac{11}{12}\pi$, $x = 1\frac{5}{12}\pi$ en $x = 1\frac{11}{12}\pi$.

- **$\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$**
  los je op door uit de exacte-waarden-cirkel één oplossing B af te lezen.
  Daarna gebruik je
  $\sin(A) = C$ geeft
  $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = \pi - B + k \cdot 2\pi$
  $\cos(A) = C$ geeft
  $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = -B + k \cdot 2\pi$.

  Bij de vergelijking $2\sin\left(3x - \frac{1}{4}\pi\right) = \sqrt{3}$
  krijg je $\sin\left(3x - \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en dit geeft
  $3x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x - \frac{1}{4}\pi = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

  $3x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = \frac{11}{12}\pi + k \cdot 2\pi$

  $x = \frac{7}{36}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{11}{36}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$



figuur 12.1 De exacte-waarden-cirkel.

- **$\sin(A) = \sin(B)$ en $\cos(A) = \cos(B)$**
  los je op door te gebruiken
  $\sin(A) = \sin(B)$ geeft $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = \pi - B + k \cdot 2\pi$
  $\cos(A) = \cos(B)$ geeft $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = -B + k \cdot 2\pi$.

  Bij de vergelijking $\sin\left(2x - \frac{1}{4}\pi\right) = \sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)$ krijg je

  $2x - \frac{1}{4}\pi = x + \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{4}\pi = \pi - \left(x + \frac{1}{3}\pi\right) + k \cdot 2\pi$

  $x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{4}\pi = \pi - x - \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

  $x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = \frac{11}{12}\pi + k \cdot 2\pi$

  $x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{11}{36}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

12

1 Los algebraïsch op.

a $\sin\left(4x - \frac{1}{6}\pi\right) = 1$

b $\cos^2(3x) = 1$

c $2\sin\left(4x - \frac{1}{6}\pi\right) = \sqrt{2}$

d $4\cos^2\left(x - \frac{1}{6}\pi\right) = 3$

e $\sin(2x) = \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$

f $\cos(3x) = \cos\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)$

2 Bereken exact de oplossingen op $[0, 2\pi]$.

a $\sin\left(2x - \frac{1}{6}\pi\right) + 1 = 0$

b $\cos^2(x) + \cos(x) = 0$

c $2\sin\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right) + \sqrt{3} = 0$

d $\cos(2x) - \cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) = 0$

Theorie B Sinusoïden

De vier kenmerken van de sinusoïde $y = a + b\sin(c(x - d))$ met $c > 0$ zijn

- de evenwichtsstand is a
- de amplitude is $|b|$
- de periode is $\dfrac{2\pi}{c}$
- een beginpunt is (d, a).

Als $b > 0$ dan gaat de grafiek stijgend door het punt (d, a) en als $b < 0$ dan gaat de grafiek dalend door het punt (d, a).

De vier kenmerken van de sinusoïde $y = a + b\cos(c(x - d))$ met $c > 0$ zijn

- de evenwichtsstand is a
- de amplitude is $|b|$
- de periode is $\dfrac{2\pi}{c}$
- een beginpunt is $(d, a + b)$.

Als $b > 0$ dan is het punt $(d, a + b)$ een hoogste punt en als $b < 0$ dan is het punt $(d, a + b)$ een laagste punt.

Je gebruikt de vier kenmerken bij het tekenen van een sinusoïde en bij het opstellen van een formule bij een getekende sinusoïde. Ook als een periodiek verschijnsel gegeven is in woorden gebruik je de vier kenmerken om hierbij een formule op te stellen.

3 Gegeven is de functie $f(x) = 2 - 3\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right)$ met domein $[0, 2\pi]$.

a Noteer de vier kenmerken.

b Teken de grafiek van f.

c Bereken exact $f(0)$, $f\left(\frac{5}{12}\pi\right)$ en $f\left(\frac{19}{24}\pi\right)$.

d Los exact op $f(x) > \frac{1}{2}$.

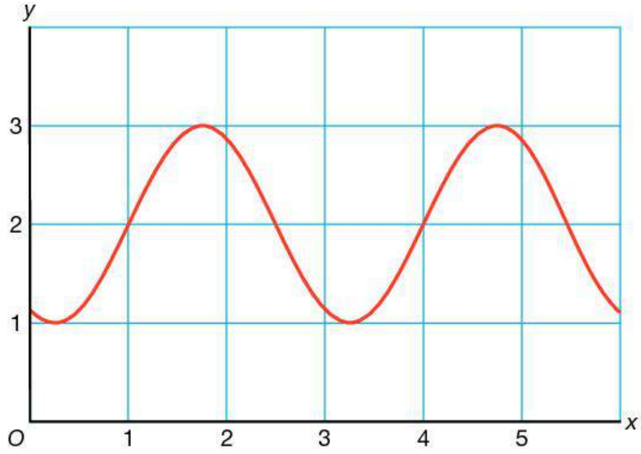
12

4 Zie de sinusoïde in figuur 12.2.

a Stel een formule op met een sinus.

b Stel een formule op van de vorm $y = a + b\cos(c(x - d))$ met $b > 0$.

c Stel een formule op van de vorm $y = a + b\cos(c(x - d))$ met $b < 0$.



figuur 12.2

Theorie C Goniometrische functies differentiëren en integreren

Je weet

- $f(x) = \sin(x)$ geeft $f'(x) = \cos(x)$
- $g(x) = \cos(x)$ geeft $g'(x) = -\sin(x)$
- $h(x) = \tan(x)$ geeft $h'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ en $h'(x) = 1 + \tan^2(x)$
- $f(x) = \sin(ax + b)$ geeft $F(x) = -\dfrac{1}{a}\cos(ax + b) + c$
- $g(x) = \cos(ax + b)$ geeft $G(x) = \dfrac{1}{a}\sin(ax + b) + c$

Zo is $\displaystyle\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} (2 + 3\sin(4x))\mathrm{d}x = \left[2x - \tfrac{3}{4}\cos(4x)\right]_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} =$

$\frac{2}{3}\pi - \frac{3}{4}\cos\left(1\frac{1}{3}\pi\right) - \left(\frac{1}{3}\pi - \frac{3}{4}\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right) = \frac{2}{3}\pi - \frac{3}{4} \cdot -\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\pi + \frac{3}{4} \cdot -\frac{1}{2} = \frac{1}{3}\pi.$

5 Gegeven is de functie $f(x) = 3 - 2\cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$ met domein $[0, 2\pi]$.

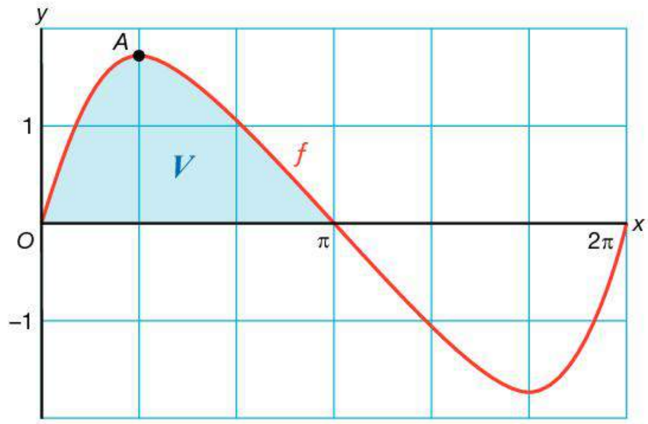
a Stel langs algebraïsche weg de formule op van de raaklijn k in het punt A met $x_A = \pi$. Geef een exact antwoord.

b Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de lijn $y = 4$.

6 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{3\sin(x)}{2 - \cos(x)}$ met domein $[0, 2\pi]$. In figuur 12.3 zie je de grafiek van f.

a Bereken exact de coördinaten van de top A van de grafiek.

b Toon aan dat $F(x) = 3\ln(2 - \cos(x))$ een primitieve is van f en bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V.



figuur 12.3

12.1 Goniometrische formules bij vergelijkingen en herleidingen

O 1 Gegeven is de vergelijking $\sin(2x) + \sin(x) = 0$.

a Licht toe dat de vergelijking te herleiden is tot $\sin(2x) = \sin(x + \pi)$.

b Los de vergelijking algebraïsch op.

Theorie A Goniometrische vergelijkingen

Je kent de volgende formules.

$\sin(-A) = -\sin(A)$ $-\sin(A) = \sin(A + \pi)$ $\sin(A) = \cos\left(A - \frac{1}{2}\pi\right)$	$\cos(-A) = \cos(A)$ $-\cos(A) = \cos(A + \pi)$ $\cos(A) = \sin\left(A + \frac{1}{2}\pi\right)$	$\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1$ $\tan(A) = \dfrac{\sin(A)}{\cos(A)}$

Soms moet je om een goniometrische vergelijking op te lossen, deze herleiden met behulp van goniometrische formules tot de vorm $\sin(A) = \sin(B)$ of $\cos(A) = \cos(B)$.
Daarna gebruik je de algemene regels voor het oplossen van goniometrische vergelijkingen.

$\sin(A) = \sin(B)$ geeft $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = \pi - B + k \cdot 2\pi$
$\cos(A) = \cos(B)$ geeft $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = -B + k \cdot 2\pi$

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen op $[0, 2\pi]$ van $\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = -\cos\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)$.

Uitwerking

$\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = -\cos\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)$ $\qquad -\cos(A) = \cos(A + \pi)$

$\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(x + 1\frac{1}{3}\pi\right)$ $\qquad \cos(A) = \sin\left(A + \frac{1}{2}\pi\right)$

$\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(x + 1\frac{5}{6}\pi\right)$

$2x - \frac{1}{3}\pi = x + 1\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{3}\pi = \pi - \left(x + 1\frac{5}{6}\pi\right) + k \cdot 2\pi$

$x = 2\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{3}\pi = \pi - x - 1\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = 2\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = 2\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{1}{2}\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi \vee x = 1\frac{5}{6}\pi$

R 2 Zie het voorbeeld.
Los de vergelijking $\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = -\cos\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)$ op door deze te herleiden tot de vorm $\cos(A) = \cos(B)$.

12

3 Bereken exact de oplossingen op $[0, 2\pi]$.

a $\sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) = \cos(2x)$

b $\sin(3x) = -\cos(x)$

c $\sin^2(x) + \frac{1}{2}\cos(x) = 1$

d $\cos(x - 1) = -\cos(2x + 1)$

e $\sin(2x + \pi) = 1 - 2\sin(2x)$

f $2\sin^2(x) + \cos^2(x) + \cos(x) = 0$

4 Bereken algebraïsch de oplossingen op $[0, 3]$.

a $\cos(2\pi t) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi t\right)$

b $\sin\left(\frac{1}{6}\pi t\right) = -\cos(\pi t)$

R 5 Welke van de volgende vergelijkingen zijn algebraïsch op te lossen? Geef bij deze vergelijkingen de eerste stap van de uitwerking.

a $2\sin(x) = \sin(x)$

b $\sin(2x) = \sin(x)$

c $2\sin(x) = \cos(x)$

d $2\sin(x) = \sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)$

e $\sin(2x) = \sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)$

f $5\sin(x) = \sin(5x)$

Niet elke goniometrische vergelijking is algebraïsch op te lossen. Grafisch-numeriek oplossen kan altijd.

6 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = -\cos(2x)$, beide met domein $[0, 2\pi]$.

a Hoe ontstaat de grafiek van g uit die van $y = \cos(x)$?

b Schets de grafieken van f en g in één figuur.

c Bereken exact de oplossingen van $f(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

d Bereken exact de oplossingen van $g(x) = \frac{1}{2}$.

e Los exact op $f(x) \leq g(x)$.

A 7 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right)$ en $g(x) = -\cos\left(x + \frac{1}{6}\pi\right)$, beide met domein $\left[0, 1\frac{1}{2}\pi\right]$.

a Geef van de grafieken van f en g de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt.

b Teken de grafieken van f en g in één figuur.

c Bereken exact de nulpunten van f en g.

d Los exact op $f(x) > \frac{1}{2}$.

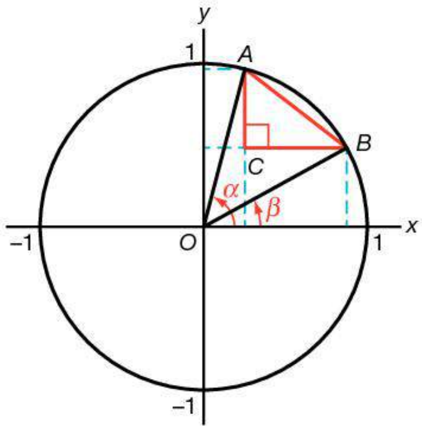
e Los exact op $f(x) < g(x)$.

O 8 Zie figuur 12.4 met de eenheidscirkel, het punt A met draaiingshoek α en het punt B met draaiingshoek β.
Er geldt $AC = \sin(\alpha) - \sin(\beta)$ en $BC = \cos(\beta) - \cos(\alpha)$.

a Licht dit toe.

Uit vraag a volgt
$AB^2 = 2 - 2\sin(\alpha)\sin(\beta) - 2\cos(\alpha)\cos(\beta)$.

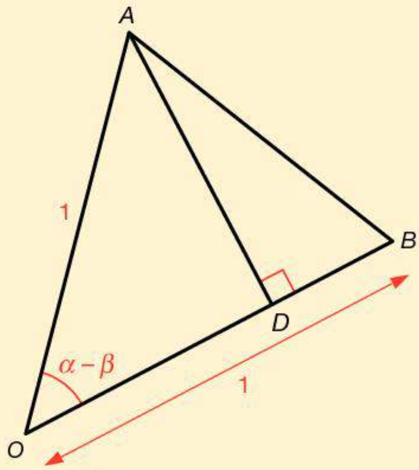
b Toon dit aan.



figuur 12.4

Theorie B Verschil-, som- en verdubbelingsformules

In de figuur hiernaast is $\triangle OAB$ van figuur 12.4 nog eens getekend. Bovendien is de hoogtelijn AD getekend.
Er geldt $OD = \cos(\alpha - \beta)$ en $BD = 1 - \cos(\alpha - \beta)$.
In $\triangle OAD$ is $AD^2 = 1 - \cos^2(\alpha - \beta)$ ... **(1)**



figuur 12.5

In $\triangle BAD$ is $AD^2 = AB^2 - BD^2$.
In opgave 8 heb je gezien dat
$AB^2 = 2 - 2\sin(\alpha)\sin(\beta) - 2\cos(\alpha)\cos(\beta)$.

Zo krijg je

$$\begin{aligned} AD^2 &= AB^2 - BD^2 \\ &= 2 - 2\sin(\alpha)\sin(\beta) - 2\cos(\alpha)\cos(\beta) - (1 - \cos(\alpha - \beta))^2 \\ &= 2 - 2\sin(\alpha)\sin(\beta) - 2\cos(\alpha)\cos(\beta) - 1 + 2\cos(\alpha - \beta) - \cos^2(\alpha - \beta) \text{ ... } \mathbf{(2)} \end{aligned}$$

Uit **(1)** en **(2)** volgt
$1 - \cos^2(\alpha - \beta) = 1 - 2\sin(\alpha)\sin(\beta) - 2\cos(\alpha)\cos(\beta) + 2\cos(\alpha - \beta) - \cos^2(\alpha - \beta)$
en dit geeft $2\cos(\alpha - \beta) = 2\sin(\alpha)\sin(\beta) + 2\cos(\alpha)\cos(\beta)$.
Dus $\cos(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\sin(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\beta)$

Dit noteren we als volgt.
$\cos(t - u) = \cos(t)\cos(u) + \sin(t)\sin(u)$
Dit is een van de **verschilformules**.
Voor t en u kun je elke uitdrukking invullen.

Verschilformules
$\mathbf{\cos(t - u) = \cos(t)\cos(u) + \sin(t)\sin(u)}$
$\mathbf{\sin(t - u) = \sin(t)\cos(u) - \cos(t)\sin(u)}$

De verschilformule voor de sinus leid je af in opgave 9.

12

Uit de verschilformules volgen de **somformules**.
Ook deze leid je af in opgave 9.

Somformules
$\cos(t + u) = \cos(t)\cos(u) - \sin(t)\sin(u)$
$\sin(t + u) = \sin(t)\cos(u) + \cos(t)\sin(u)$

Uit de somformules volgen de vier **verdubbelingsformules**.
Deze leid je af in opgave 10.

Verdubbelingsformules
$\sin(2A) = 2\sin(A)\cos(A)$
$\cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A)$
$\cos(2A) = 2\cos^2(A) - 1$
$\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$

De verdubbelingsformules staan evenals de som- en verschilformules op het voorblad van het Centraal Examen.

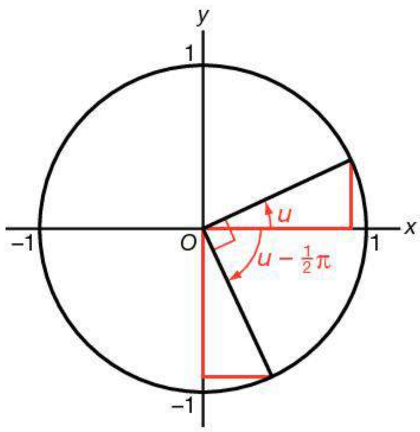
De verdubbelingsformules heb je soms nodig bij het oplossen van goniometrische vergelijkingen.
Bij de vergelijking $4\sin(x)\cos(x) = \sqrt{3}$ gebruik je dat $2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$.
Dit geeft $2\sin(2x) = \sqrt{3}$.
Dus $\sin(2x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, enzovoort.

Bij de vergelijking $\sin^2(2x) = \cos(4x) + 2$ gebruik je $2\sin^2(2x) = 1 - \cos(4x)$.

Dit geeft $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4x) = \cos(4x) + 2$
$-1\frac{1}{2}\cos(4x) = 1\frac{1}{2}$
enzovoort.

$\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$
$2\sin^2(A) = 1 - \cos(2A)$
dus
$2\sin^2(2x) = 1 - \cos(4x)$

9 **a** Leid de somformule voor de cosinus af uit de verschilformule voor de cosinus door u te vervangen door $-u$.
b Leid de somformule voor de sinus af uit de somformule voor de cosinus door u te vervangen door $u - \frac{1}{2}\pi$ en te gebruiken dat $\sin\left(u - \frac{1}{2}\pi\right) = -\cos(u)$.
c Leid de verschilformule voor de sinus af uit de somformule voor de sinus.



figuur 12.6 $\sin\left(u - \frac{1}{2}\pi\right) = -\cos(u)$

10 **a** Leid de eerste twee verdubbelingsformules af uit de somformules door te nemen $t = A$ en $u = A$.
b Leid de andere twee verdubbelingsformules af door $\cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A)$ te herleiden.

$\cos^2(A) + \sin^2(A) = 1$, dus
$\cos^2(A) = 1 - \sin^2(A)$ en
$\sin^2(A) = 1 - \cos^2(A)$

11 **a** Herleid de formule $\cos(2A) = 2\cos^2(A) - 1$ tot $\cos^2(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2A)$.
b Herleid de formule $\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$ tot $\sin^2(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2A)$.

12 Bereken exact de oplossingen.
a $2\sin(x)\cos(x) = \sin(x - 1)$
b $\cos^2(2x) = \cos(4x) + \frac{1}{2}$
c $\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right) = \cos(x) + 1\frac{1}{4}$
d $(\sin(x) + \cos(x))^2 = 1\frac{1}{2}$

13 De grafiek bij de formule $y = \sin^2(x) + \cos(2x)$ is een sinusoïde.
a Schets de grafiek en stel hierbij een formule op van de vorm $y = a + b\cos(cx)$.
b Toon aan dat de in a opgestelde formule juist is door de formule $y = \sin^2(x) + \cos(2x)$ te herleiden.

14 Toon aan dat $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$. Gebruik $\sin(3x) = \sin(2x + x)$ en de somformule voor de sinus.

A 15 **a** Herleid de formule $y = 1 - \cos(x) - \sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)$ tot de vorm $y = a + b\cos(cx)$.
b Toon aan dat $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$.

R 16 Om bij $-\sin(2x)$ het minteken voor de sinus weg te werken, kun je de formule $-\sin(A) = \sin(A + \pi)$ gebruiken.
Je krijgt $-\sin(2x) = \sin(2x + \pi)$.
Welke formule kun je gebruiken om
a bij $-\cos(2x)$ het minteken weg te werken
b $\sin(2x)$ om te zetten in een vorm waarin geen sinus meer voorkomt
c bij $\sin^2(2x)$ het kwadraat weg te werken
d bij $\cos^2(3x)$ het kwadraat weg te werken
e $\cos(4x)$ om te zetten in een vorm met een sinus?

Geschiedenis Ptolemaeus

Claudius Ptolemaeus (85-165) werd geboren in Egypte. Het belangrijkste werk van Ptolemaeus is de Almagest, het grootste astronomische meesterwerk uit de oudheid. De Almagest heeft zijn actualiteit nooit verloren. Hij bevat veel goniometrische formules. Enkele voorbeelden hiervan zijn de formules $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ en $\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$.
Een aantal formules uit de Almagest is door Ptolemaeus zelf ontwikkeld. Opvallend is overigens dat de formule $\sin(2x) = 2\sin(x) \cdot \cos(x)$ pas in het jaar 980 voor het eerst opduikt in het werk van de Arabier Abu-I-Wafa.
Andere bekende geschriften van Ptolemaeus zijn Planisphaericum en Geographia waarin hij bijvoorbeeld de geografische begrippen lengte en breedte heeft beschreven.
Ptolemaeus overleed in 165 in Alexandrië.

Terugblik

Herleiden en oplossen

Staat een goniometrische vergelijking niet in de vorm $\sin(A) = \sin(B)$ of $\cos(A) = \cos(B)$, dan kun je soms met goniometrische formules de vergelijking tot zo'n vorm herleiden.

Bij het exact oplossen van de vergelijking $\sin(4x) = -\cos(x)$ gebruik je de formules $\cos(A) = \sin\left(A + \frac{1}{2}\pi\right)$ en $-\sin(A) = \sin(A + \pi)$.
Je krijgt $\sin(4x) = -\cos(x)$

$$\sin(4x) = -\sin\left(x + \tfrac{1}{2}\pi\right)$$
$$\sin(4x) = \sin\left(x + 1\tfrac{1}{2}\pi\right)$$
$$4x = x + 1\tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 4x = \pi - x - 1\tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$3x = 1\tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 5x = -\tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$x = \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot \tfrac{2}{3}\pi \vee x = -\tfrac{1}{10}\pi + k \cdot \tfrac{2}{5}\pi$$

Je kunt ook toewerken naar $\cos(A) = \cos(B)$.
Je krijgt $\sin(4x) = -\cos(x)$

$$\cos\left(4x - \tfrac{1}{2}\pi\right) = \cos(x + \pi)$$
$$4x - \tfrac{1}{2}\pi = x + \pi + k \cdot 2\pi \vee 4x - \tfrac{1}{2}\pi = -x - \pi + k \cdot 2\pi$$
$$3x = 1\tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 5x = -\tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$x = \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot \tfrac{2}{3}\pi \vee x = -\tfrac{1}{10}\pi + k \cdot \tfrac{2}{5}\pi$$

Formules en herleiden

Som- en verschilformules
$\cos(t + u) = \cos(t)\cos(u) - \sin(t)\sin(u)$ $\sin(t + u) = \sin(t)\cos(u) + \cos(t)\sin(u)$ $\cos(t - u) = \cos(t)\cos(u) + \sin(t)\sin(u)$ $\sin(t - u) = \sin(t)\cos(u) - \cos(t)\sin(u)$
Verdubbelingsformules
$\sin(2A) = 2\sin(A)\cos(A)$ $\cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A)$ $\cos(2A) = 2\cos^2(A) - 1$ $\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$

Deze formules kun je gebruiken om goniometrische formules te herleiden.
Zo is $y = \cos(2x) - 3\sin^2(x)$ te herleiden tot de vorm $y = a + b\cos(cx)$.

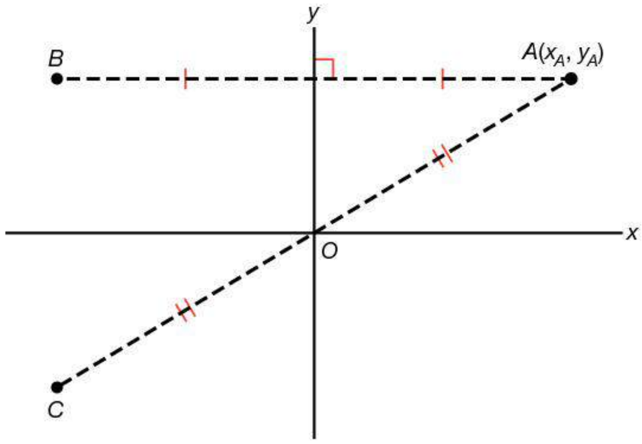
$$y = \cos(2x) - 3\sin^2(x)$$
$$= \cos(2x) - 3\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2x)\right)$$
$$= \cos(2x) - 1\tfrac{1}{2} + 1\tfrac{1}{2}\cos(2x)$$
$$= -1\tfrac{1}{2} + 2\tfrac{1}{2}\cos(2x)$$

$$\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$$
$$2\sin^2(A) = 1 - \cos(2A)$$
$$\sin^2(A) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2A)$$

12

12.2 Goniometrische formules bij symmetrie en primitiveren

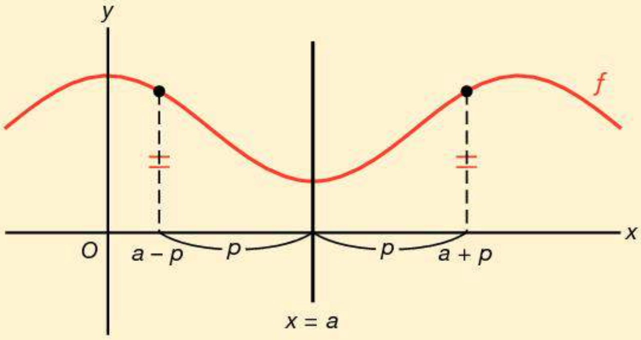
O 17 Gegeven is het punt $A(x_A, y_A)$.
Door A te spiegelen in de y-as krijg je het punt B en door A te spiegelen in de oorsprong krijg je het punt C.
Druk de coördinaten van B en C uit in x_A en y_A.



figuur 12.7

Theorie A Lijn- en puntsymmetrie

De grafiek van de functie f in de figuur hiernaast is **lijnsymmetrisch** in de lijn $x = a$.
Dat wil zeggen dat voor elke p geldt $f(a - p) = f(a + p)$. We gaan er hierbij vanuit dat $a - p$ en $a + p$ tot het domein van f behoren.

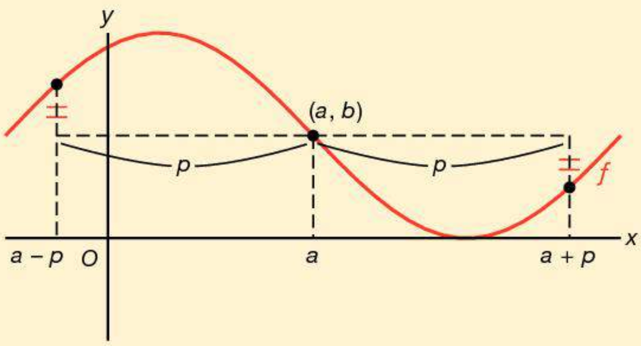


figuur 12.8

De grafiek van de functie f is lijnsymmetrisch in de lijn $x = a$ als voor elke p geldt $f(a - p) = f(a + p)$.

Een bijzonder geval van lijnsymmetrie is symmetrie in de y-as, ofwel de lijn $x = 0$.
Dan geldt voor elke p dat $f(-p) = f(p)$.

De grafiek van de functie f in de figuur hiernaast is **puntsymmetrisch** in het punt (a, b). Dat wil zeggen dat voor elke p geldt $f(a - p) - b = b - f(a + p)$ ofwel $f(a - p) + f(a + p) = 2b$.
We gaan er hierbij vanuit dat $a - p$ en $a + p$ tot het domein van f behoren.



figuur 12.9

De grafiek van de functie f is puntsymmetrisch in het punt (a, b) als voor elke p geldt $f(a - p) + f(a + p) = 2b$.

Een bijzonder geval van puntsymmetrie is puntsymmetrie in O.
Dan geldt voor elke p dat $f(-p) + f(p) = 0$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \sin^2(x) + \cos(x)$.

a Toon aan dat de grafiek van f symmetrisch is in de y-as.

b Toon aan dat de grafiek van f symmetrisch is in de lijn $x = \pi$.

Uitwerking

a $f(-p) = \sin^2(-p) + \cos(-p) = (\sin(-p))^2 + \cos(p)$
$= (-\sin(p))^2 + \cos(p) = \sin^2(p) + \cos(p) = f(p)$
Er geldt $f(-p) = f(p)$, dus symmetrisch in de y-as.

b $f(\pi - p) = \sin^2(\pi - p) + \cos(\pi - p) = \sin^2(p) - \cos(p)$
$f(\pi + p) = \sin^2(\pi + p) + \cos(\pi + p) = (-\sin(p))^2 - \cos(p) = \sin^2(p) - \cos(p)$
Er geldt $f(\pi - p) = f(\pi + p)$, dus symmetrisch in de lijn $x = \pi$.

R 18 Zie voorbeeld b.
Toon met behulp van de eenheidscirkel aan dat
$\sin(\pi - p) = \sin(p)$ en $\cos(\pi - p) = -\cos(p)$.

19 **a** Toon aan dat de grafiek van $f(x) = x\cos(x)$ symmetrisch is in de oorsprong.
b Toon aan dat de grafiek van $g(x) = x\sin(x)$ symmetrisch is in de y-as.

20 Gegeven is de functie $f(x) = \cos^2(x)\sin(x)$.
Toon aan dat de grafiek van f
a puntsymmetrisch is in O
b lijnsymmetrisch is in de lijn $x = \frac{1}{2}\pi$.

21 Gegeven is de functie $f(x) = 2\sin(x) - 2\cos(x)$. De grafiek van f is symmetrisch in de lijn $x = -\frac{1}{4}\pi$.
a Herleid $f\left(-\frac{1}{4}\pi - p\right)$ met behulp van verschilformules.
b Toon de symmetrie aan.

A 22 Toon aan dat de grafiek van $f(x) = \cos(x) + \sin(x) + 1$
a lijnsymmetrisch is in de lijn $x = \frac{1}{4}\pi$
b puntsymmetrisch is in het punt $\left(\frac{3}{4}\pi, 1\right)$.

O 23 Gegeven is de functie $f(x) = \sin^2(x)$.
a Is $y = \frac{1}{3}\sin^3(x)$ een primitieve van f? Licht toe.
b Gebruik de formule $\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$ om $\sin^2(x)$ in $\cos(2x)$ uit te drukken.
c Bereken de primitieven van f.

Theorie B Verdubbelingsformules en primitiveren

Van goniometrische functies die niet van de vorm $y = a + b\sin(c(x-d))$ of $y = a + b\cos(c(x-d))$ zijn, is het meestal niet eenvoudig de primitieven te vinden. Soms zijn deze functies met behulp van een verdubbelingsformule te herleiden tot een vorm die je wel kunt primitiveren.

Voorbeeld

Primitiveer $f(x) = \cos^2(4x)$.

$\cos(2A) = 2\cos^2(A) - 1$
$2\cos^2(A) = 1 + \cos(2A)$
$\cos^2(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2A)$

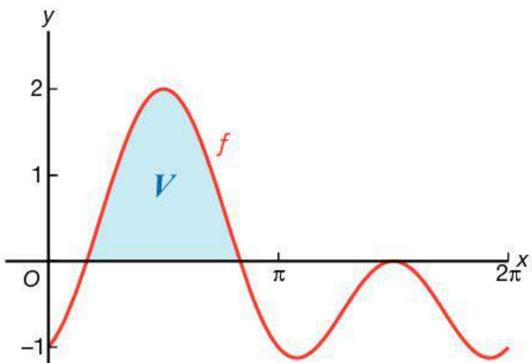
Uitwerking
$f(x) = \cos^2(4x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(8x)$ geeft
$F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\sin(8x) + c$

24 Primitiveer.
a $f(x) = \cos^2(x)$
b $g(x) = \sin^2(3x)$
c $h(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

25 Bereken exact.
a $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{6}\pi} \sin(2x)\cos(2x)\,dx$
b $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\pi} \left(2 - \frac{1}{2}\sin^2(x)\right)dx$

26 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = \sin(2x)$ met domein $\left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$ en de x-as.
Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.

A 27 In figuur 12.10 is de grafiek getekend van de functie $f(x) = 2\sin^2(x) + \sin(x) - 1$ met domein $[0, 2\pi]$.
a Bereken exact het bereik van f.
b Bereken exact de oppervlakte van V.



figuur 12.10

A 28 Gegeven is de functie $f(x) = \sin^2(x) + \sin(x) + \frac{1}{4}$ met domein $[0, 2\pi]$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as.
Bereken exact de oppervlakte van V.

A 29 Gegeven is de functie $f(x) = 1\frac{1}{2} - 3\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ met domein $[0, 4\pi]$.
a Teken de grafiek van f.

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as.
b Bereken exact de oppervlakte van V.
c Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.

Terugblik

Lijn- en puntsymmetrie

De grafiek van een functie f is

- lijnsymmetrisch in de lijn $x = a$ als $f(a - p) = f(a + p)$ voor elke p en
- puntsymmetrisch in (a, b) als $f(a - p) + f(a + p) = 2b$ voor elke p.

Je toont als volgt aan dat de grafiek van $f(x) = \cos(x) - \sin(x)$ symmetrisch is in $\left(\frac{1}{4}\pi, 0\right)$.

$$\begin{aligned} f\left(\tfrac{1}{4}\pi - p\right) &= \cos\left(\tfrac{1}{4}\pi - p\right) - \sin\left(\tfrac{1}{4}\pi - p\right) \\ &= \cos\left(\tfrac{1}{4}\pi\right)\cos(p) + \sin\left(\tfrac{1}{4}\pi\right)\sin(p) - \left(\sin\left(\tfrac{1}{4}\pi\right)\cos(p) - \cos\left(\tfrac{1}{4}\pi\right)\sin(p)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\cos(p) + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sin(p) - \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\cos(p) - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sin(p)\right) \\ &= \sqrt{2}\cdot\sin(p) \ldots \textbf{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\tfrac{1}{4}\pi + p\right) &= \cos\left(\tfrac{1}{4}\pi + p\right) - \sin\left(\tfrac{1}{4}\pi + p\right) \\ &= \cos\left(\tfrac{1}{4}\pi\right)\cos(p) - \sin\left(\tfrac{1}{4}\pi\right)\sin(p) - \left(\sin\left(\tfrac{1}{4}\pi\right)\cos(p) + \cos\left(\tfrac{1}{4}\pi\right)\sin(p)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\cos(p) - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sin(p) - \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\cos(p) + \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin(p)\right) \\ &= -\sqrt{2}\cdot\sin(p) \ldots \textbf{(2)} \end{aligned}$$

Uit **(1)** en **(2)** volgt $f\left(\frac{1}{4}\pi - p\right) + f\left(\frac{1}{4}\pi + p\right) = 0$.

Dus de grafiek van f is symmetrisch in $\left(\frac{1}{4}\pi, 0\right)$.

Verdubbelingsformules en primitiveren

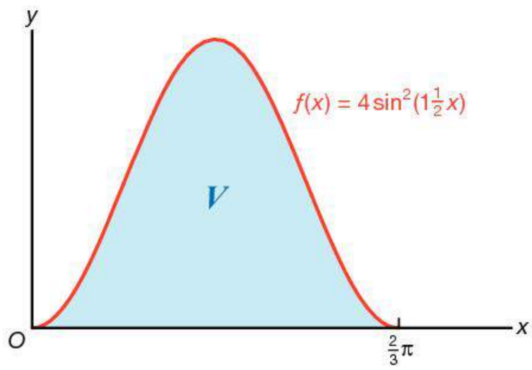
Door gebruik te maken van verdubbelingsformules kun je soms de formule van een functie f zo herleiden, dat je de primitieven van f kunt vinden.
Zo gebruik je bij het primitiveren van $f(x) = 4\sin^2\left(1\frac{1}{2}x\right)$ de formule

$\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$ ofwel $\sin^2(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2A)$ met $A = 1\frac{1}{2}x$.

Dit geeft $f(x) = 4\sin^2\left(1\frac{1}{2}x\right) = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(3x)\right) = 2 - 2\cos(3x)$.

Dus $F(x) = 2x - \frac{2}{3}\sin(3x) + c$.

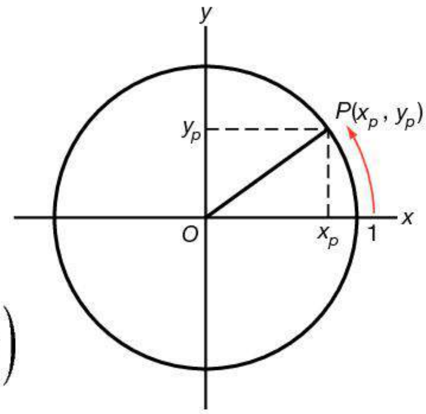
Bij het exact berekenen van de oppervlakte van het vlakdeel V in de figuur hiernaast krijg je



$$\begin{aligned} O(V) &= \int_0^{\frac{2}{3}\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{2}{3}\pi} 4\sin^2\left(1\tfrac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[2x - \tfrac{2}{3}\sin(3x)\right]_0^{\frac{2}{3}\pi} \\ &= 2\cdot\tfrac{2}{3}\pi - \tfrac{2}{3}\sin(2\pi) - \left(0 - \tfrac{2}{3}\sin(0)\right) = 1\tfrac{1}{3}\pi. \end{aligned}$$

12.3 Cirkelbewegingen en trillingen

O 30 Het punt P doorloopt de eenheidscirkel in positieve draairichting met constante snelheid. Een rondgang duurt 5 seconden. Op $t = 0$ is P in het punt (1, 0). Hierbij is t de tijd in seconden.



figuur 12.11

a Licht toe dat voor y_P geldt $y_P = \sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$.

b Welke van de volgende formules hoort bij x_P?

I $x_P = 5\sin(t)$

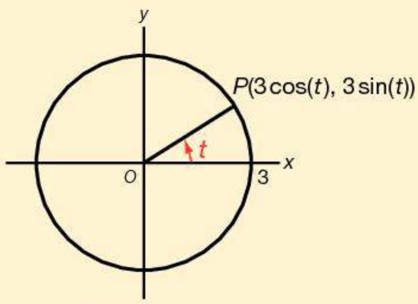
II $x_P = \cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$

III $x_P = -\sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$

IV $x_P = \cos(5t)$

Theorie A Eenparige cirkelbewegingen

Bij de formules $x_P = 3\cos(t)$ en $y_P = 3\sin(t)$ met t in seconden hoort een **eenparige cirkelbeweging** van het punt P. Hierbij doorloopt P met constante snelheid de cirkel met middelpunt (0, 0) en straal 3. De draairichting hierbij is positief.
Op $t = 0$ is P in het punt (3, 0). De **omlooptijd** T is 2π seconden, want na 2π seconden is P weer terug in het punt (3, 0).
Het lijnstuk OP draait hierbij over een hoek van 2π radialen.



figuur 12.12

Dus in 1 seconde draait OP over een hoek van $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$ radiaal.

De **hoeksnelheid** van P is 1 rad/s.

Is de omlooptijd 7 seconden dan is de hoeksnelheid $\frac{2\pi}{7}$ rad/s.

Bij de eenparige cirkelbeweging met $x = \cos(3t)$ en $y = \sin(3t)$ met t in seconden is de hoeksnelheid 3 rad/s.
De hoeksnelheid wordt vaak aangegeven met de Griekse letter ω (omega).
Draait een punt tegen de wijzers van de klok in, dan is ω positief en draait een punt met de wijzers van de klok mee, dan is ω negatief.

> hoeksnelheid $|\omega| = \frac{2\pi}{T}$
> omlooptijd $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$
> omlooptijd = periode

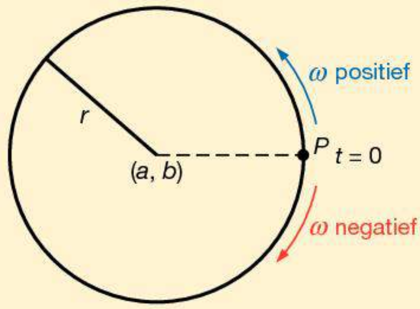
Het punt Q doorloopt met hoeksnelheid 5 rad/s de cirkel met middelpunt (1, 3) en straal 4 en is op $t = 0$ in het punt (5, 3).
De bewegingsvergelijkingen van Q zijn $x_Q(t) = 1 + 4\cos(5t)$ en $y_Q(t) = 3 + 4\sin(5t)$.

Zoals je weet kunnen we dit noteren met de parametervoorstelling

$$\begin{cases} x_Q(t) = 1 + 4\cos(5t) \\ y_Q(t) = 3 + 4\sin(5t) \end{cases}$$

12

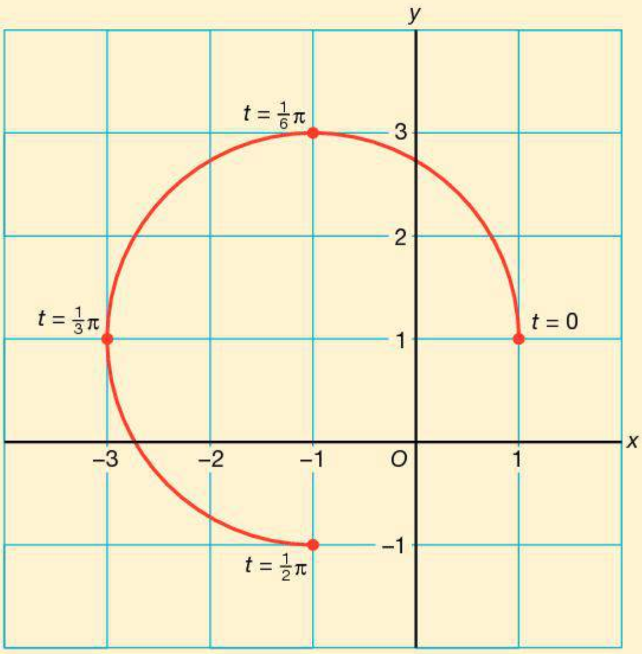
De parametervoorstelling $\begin{cases} x(t) = a + r\cos(\omega t) \\ y(t) = b + r\sin(\omega t) \end{cases}$ met t in seconden beschrijft de eenparige cirkelbeweging van een punt P.
Hierbij is (a, b) het middelpunt van de cirkel, r de straal en ω de hoeksnelheid in rad/s.
De omlooptijd is $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$.
Op $t = 0$ is P in het punt $(a + r, b)$.



Om de baan van het punt P te tekenen die gegeven is door de parametervoorstelling $\begin{cases} x(t) = -1 + 2\cos(3t) \\ y(t) = 1 + 2\sin(3t) \end{cases}$ met t op $\left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$ bedenk je het volgende.

- P beweegt over de cirkel met middelpunt $(-1, 1)$ en straal 2.
- $\omega = 3$, dus P draait in positieve richting.
- De hoek waarover P draait op $\left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$ loopt van $3 \cdot 0 = 0$ tot $3 \cdot \frac{1}{2}\pi = 1\frac{1}{2}\pi$.
  De baan is dus $\frac{3}{4}$ deel van de cirkel.
- Op $t = 0$ is P in het punt $(-1 + 2, 1)$ ofwel $(1, 1)$.

De baan van het punt is hieronder getekend.



figuur 12.13

Voorbeeld

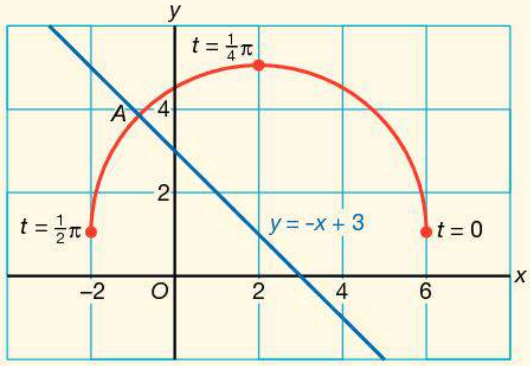
De baan van punt P is gegeven door de parametervoorstelling

$$\begin{cases} x(t) = 2 + 4\cos(2t) \\ y(t) = 1 + 4\sin(2t) \end{cases} \text{ met } t \text{ op } \left[0, \tfrac{1}{2}\pi\right].$$

a Teken de baan van P.
b De baan van P snijdt de lijn $y = -x + 3$ in het punt A.
Bereken exact de coördinaten van A.
c Bereken voor welke waarden van t punt P zich boven de lijn $y = 3$ bevindt. Rond in het antwoord af op twee decimalen.

Uitwerking

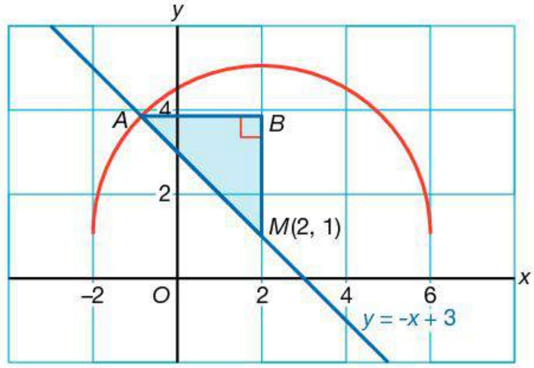
a De baan van P ligt op een cirkel met middelpunt (2, 1) en straal 4.
$\omega = 2$, dus P draait linksom.
t van 0 tot $\frac{1}{2}\pi$ geeft een hoek van $2 \cdot 0 = 0$ tot $2 \cdot \frac{1}{2}\pi = \pi$, dus de baan is een halve cirkel.
$t = 0$ geeft P in (6, 1).



b Substitutie van de pv in $y = -x + 3$ geeft
$1 + 4\sin(2t) = -(2 + 4\cos(2t)) + 3$
$1 + 4\sin(2t) = -2 - 4\cos(2t) + 3$
$4\sin(2t) = -4\cos(2t)$
$\sin(2t) = -\cos(2t)$
$\cos\left(2t - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos(2t + \pi)$
$2t - \frac{1}{2}\pi = 2t + \pi + k \cdot 2\pi \vee 2t - \frac{1}{2}\pi = -2t - \pi + k \cdot 2\pi$
geen oplossing $\qquad 4t = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
$\qquad t = -\frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$
t op $\left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$ geeft $t = \frac{3}{8}\pi$.
$x_A = 2 + 4\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 2 + 4 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{2} = 2 - 2\sqrt{2}$
$y_A = -x_A + 3 = -\left(2 - 2\sqrt{2}\right) + 3 = -2 + 2\sqrt{2} + 3 = 1 + 2\sqrt{2}$
Dus $A\left(2 - 2\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}\right)$.

c Los op $y > 3$.
Voer in $y_1 = 1 + 4\sin(2x)$ en $y_2 = 3$.
Intersect geeft $x \approx 0{,}26$ en $x \approx 1{,}31$.
Dus P bevindt zich boven de lijn $y = 3$ voor $0{,}26 < t < 1{,}31$.

R 31 Zie het voorbeeld en figuur 12.14.
Licht toe dat $AB = BM = 2\sqrt{2}$ en gebruik dit om de coördinaten van A te berekenen.



figuur 12.14

12

32 De baan van P is gegeven door de parametervoorstelling
$$\begin{cases} x(t) = -1 + 2\cos(t) \\ y(t) = 3 + 2\sin(t) \end{cases} \text{ met } t \text{ op } \left[0, 1\tfrac{1}{2}\pi\right].$$

a Teken de baan van P.

b De baan van P snijdt de y-as in het punt A. Bereken exact de coördinaten van A.

c De baan van P snijdt de lijn l: $y = x + 4$ in de punten B en C. Bereken exact de coördinaten van B en C.

d Bereken in twee decimalen nauwkeurig voor welke waarden van t punt P zich links van de lijn $x = -2$ bevindt.

33 Het punt P doorloopt met hoeksnelheid 2 rad/s de cirkel met middelpunt (5, 2) en straal 3. Op $t = 0$ is P in het punt (8, 2).

a Stel de bewegingsvergelijkingen op van P.

b Bereken hoeveel seconden P zich per rondgang onder de x-as bevindt. Rond het antwoord af op twee decimalen.

A 34 De baan van P is gegeven door de bewegingsvergelijkingen $x(t) = -\frac{1}{2} + 2\cos(2t)$ en $y(t) = -\sqrt{3} + 2\sin(2t)$ met t op $\left[0, \frac{3}{4}\pi\right]$.

a Teken de baan van P.

b De baan van P snijdt de negatieve x-as in het punt A. Bereken algebraïsch de coördinaten van A.

c Bereken exact voor welke waarden van t punt P zich links van de lijn $x = -1\frac{1}{2}$ bevindt.

d Bereken zo nodig in twee decimalen nauwkeurig voor welke waarden van t punt P zich onder de lijn $y = -2$ bevindt.

A 35 De baan van punt P is gegeven door de parametervoorstelling
$$\begin{cases} x_P(t) = 2\cos(t) \\ y_P(t) = 2\sin(t) \end{cases} \text{ met } t \text{ in seconden.}$$

a Bereken in twee decimalen nauwkeurig de coördinaten van de snijpunten van de baan van P met de lijn $y = x + 1$.

b Bereken exact de lengte van het deel van de baan dat rechts van de lijn $x = 1$ ligt.

De baan van punt Q is gegeven door de parametervoorstelling
$$\begin{cases} x_Q(t) = \cos(2t) \\ y_Q(t) = \sin(2t) \end{cases} \text{ met } t \text{ in seconden.}$$

Voor de afstand tussen de punten P en Q geldt $PQ = \sqrt{5 - 4\cos(t)}$.

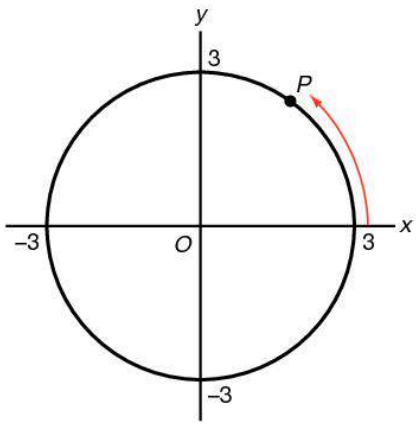
c Toon dit aan.

d Bereken hoeveel seconden per rondgang van P de afstand tussen P en Q groter is dan $1\frac{1}{2}$. Rond in het antwoord af op twee decimalen.

12

O 36 Het punt P doorloopt met constante snelheid de cirkel met middelpunt (0, 0) en straal 3. De draairichting is positief.
Op $t = 0$ is P in het punt (3, 0) en de omlooptijd is 5 seconden.
Uit de gegevens volgt dat de bewegingsvergelijkingen van P zijn $x_P(t) = 3\cos\left(\frac{2}{5}\pi t\right)$ en $y_P(t) = 3\sin\left(\frac{2}{5}\pi t\right)$, waarbij t de tijd in seconden is.
a Licht de bewegingsvergelijkingen toe.

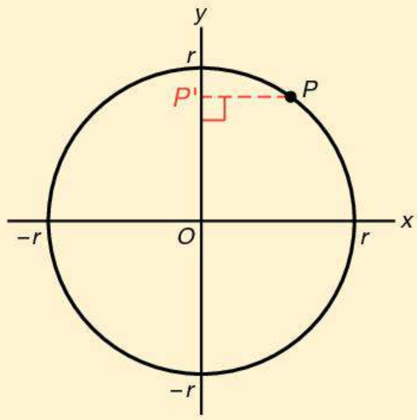
Tegelijk met het punt P beweegt P' over de y-as.
Hierbij staat PP' loodrecht op de y-as.
b Geef de formule van $y_{P'}$.



figuur 12.15

Theorie B Harmonische trillingen

Het punt P doorloopt de cirkel in figuur 12.16. Hierbij voert de projectie P' van P op de y-as een **trilling** uit.
Doorloopt het punt P de cirkel met constante snelheid, dan voert het punt P' een **harmonische trilling** uit. In plaats van harmonische trilling zegt men ook wel **harmonische beweging**.



figuur 12.16 $PP' \perp y$-as, dus P' is de projectie van P op de y-as.

Bij een eenparige cirkelbeweging van een punt P hoort een harmonische trilling van de projectie P' van P op de y-as.

De formule die de harmonische trilling van P' beschrijft is gelijk aan de formule van y_P. Bij een trilling spreekt men niet van omlooptijd, maar van **trillingstijd**. Bij een harmonische trilling is de trillingstijd dus gelijk aan de omlooptijd van de bijbehorende eenparige cirkelbeweging. Zo is bij de harmonische trilling die gegeven is door $u = 3\sin\left(\frac{2}{5}\pi t\right)$ met t in seconden de trillingstijd 5 seconden. De **frequentie** in hertz (Hz) is het aantal trillingen per seconde, dus de frequentie is $\frac{1}{5}$ Hz.
De **amplitude** bij deze trilling is 3. In plaats van amplitude spreekt men bij trillingen ook wel over **maximale uitwijking**.

Bij een harmonische trilling met amplitude b en frequentie f hoort een formule van de vorm $u = b\sin(c(t - t_0))$ met $c = 2\pi f$ en t de tijd in seconden.
Op $t = t_0$ wordt de evenwichtsstand stijgend gepasseerd.
De trillingstijd is $T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{2\pi}{c}$ seconden.

$$u = b\sin(2\pi f(t - t_0))$$
$$u = b\sin\left(\frac{2\pi}{T}(t - t_0)\right)$$

Voorbeeld

Het punt P voert een harmonische trilling uit die beschreven wordt door $u = 6\sin\left(10\pi t - \frac{3}{10}\pi\right)$. Hierin is u in cm en is t in seconden.

a Bereken de frequentie van P.
b Hoeveel meter legt P af in één minuut?

Uitwerking

a De frequentie is $\dfrac{10\pi}{2\pi} = 5\text{ Hz}$.
b Per trilling is de afgelegde afstand $4 \cdot 6 = 24$ cm.
Er zijn 5 trillingen per seconde, dus per minuut zijn er $60 \cdot 5 = 300$ trillingen.
De afgelegde afstand in één minuut is $300 \cdot 24 = 7200$ cm $= 72$ m.

37 Het punt P voert een harmonische trilling uit die beschreven wordt door $u = 5\sin\left(50\pi t - \frac{3}{5}\pi\right)$.
Hierin is u in cm en t in seconden.

a Bereken de frequentie van P.
b Hoeveel km legt P af in één kwartier?

Informatief Radiografie


Heinrich Hertz

De geschiedenis van de radio begint in 1863 als James Maxwell (1831-1879), professor in de experimentele natuurkunde aan de universiteit van Cambridge, aan de hand van wiskundige berekeningen en zonder proefondervindelijk bewijs aantoont dat er elektromagnetische golven (trillingen) bestaan. In 1887 lukt het de Duitse natuurkundige Heinrich Hertz (1857-1894) als eerste om elektromagnetische radiogolven op te wekken. Naar hem is de eenheid van frequentie hertz (Hz) genoemd. Het eerste praktische gebruik van radiogolven staat op naam van de Italiaan Guglielmo Marconi (1874-1937), die in 1901 een boodschap in morsecode over een afstand van 3200 km over de Atlantische Oceaan uitzond. Later verklaarde Marconi in een verslag aan de BBC hoe hij deze gebeurtenis destijds ervaren had: "Plotseling, om half een, klonk er een harde tik van de tikker op de coherer, wat aangaf dat er iets stond te gebeuren. Ik luisterde vol spanning. Vlak daarna hoorde ik drie tikken die overeenkwamen met drie stippen. De elektrische signalen die vanuit Cornwell waren overgeseind hadden de Atlantische Oceaan overbrugd. Ze hadden zich niets aangetrokken van de ronde vorm van de aarde waardoor volgens velen het overseinen onmogelijk zou zijn en hadden mijn ontvanger in Newfoundland bereikt."

38 Het punt P voert een harmonische trilling uit met amplitude 10 en frequentie 3 Hz.
Op $t = \frac{1}{30}$ wordt de evenwichtsstand stijgend gepasseerd.
Stel de formule die deze trilling beschrijft op in de vorm
$u = b\sin(ct - d)$.

R 39 De bewegingsvergelijkingen van het punt P zijn

$$\begin{cases} x(t) = b\cos(ct) \\ y(t) = b\sin(ct) \end{cases}$$

De projectie van P op de x-as is P''.

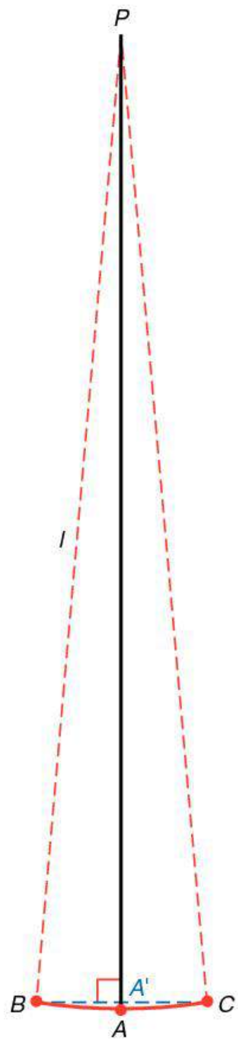
a Licht toe dat P'' een harmonische trilling uitvoert. Welke formule hoort bij deze trilling?

b Licht de volgende bewering toe:
De projectie van P op de lijn $y = x$ voert een harmonische trilling uit.

A 40 In figuur 12.17 zie je een schematische tekening van een slinger. Het punt A beweegt tijdens de slingerbeweging over boog BC van de cirkel met middelpunt P en straal $PA = l$.
Een uurwerk heeft een slinger met lengte $l = 1{,}00$ m. De (slinger)hoek BPC is 10º.

a Bereken in vier decimalen nauwkeurig de lengte van de boog BC.

b Bereken in vier decimalen nauwkeurig de lengte van het lijnstuk BC.



figuur 12.17

Je ziet dat bij dit uurwerk de lengte van de boog BC vrijwel gelijk is aan de lengte van het lijnstuk BC. De slingerbeweging van het punt A mag daarom benaderd worden door een harmonische trilling van het punt A' langs het lijnstuk BC.

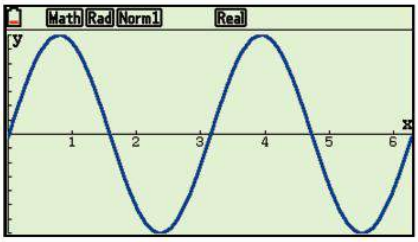
Men kan aantonen dat de trillingstijd T wordt gegeven door de formule $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.
Hierbij is g de versnelling die wordt veroorzaakt door de zwaartekracht. Neem $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$.
Neem aan dat de harmonische trilling beschreven wordt door $u = b\sin(ct)$ met u in meter en t in seconden.

c Bereken in twee decimalen nauwkeurig de waarden van b en c.

d Iedere keer dat de slinger door de evenwichtsstand gaat geeft de klok een tik.
Hoeveel tikken geeft de klok per seconde?

12

O 41 De trilling u is de som van de trillingen $u_1 = 3\sin(2t)$ en $u_2 = 4\sin\left(2t - \frac{1}{6}\pi\right)$, dus $u = 3\sin(2t) + 4\sin\left(2t - \frac{1}{6}\pi\right)$.
Op het GR-scherm hiernaast is de grafiek van u geplot.
De formule van u kan geschreven worden in de vorm $u = b\sin(2(t - d))$.
Bereken met de opties maximum en zero (TI) of ROOT (Casio) waarden van b en d in twee decimalen nauwkeurig.



figuur 12.18 De grafiek is een sinusoïde.

Theorie C Trillingen met gelijke frequentie

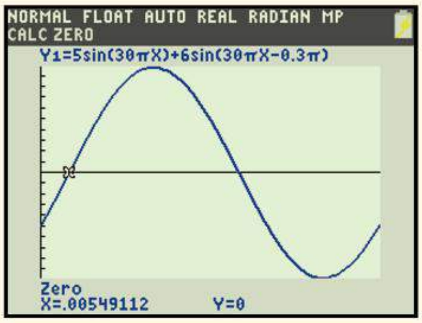
Een **samengestelde trilling** is een trilling die de som is van twee of meer trillingen.
De samenstelling van twee harmonische trillingen met gelijke frequentie is weer een harmonische trilling met dezelfde frequentie.
Je gebruikt dit bij het opstellen van de formule van de som van twee harmonische trillingen met gelijke frequentie. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

Gegeven zijn de harmonische trillingen $u_1 = 5\sin(30\pi t)$ en $u_2 = 6\sin\left(30\pi t - \frac{3}{10}\pi\right)$.
De samengestelde trilling u wordt gegeven door $u = u_1 + u_2$.
Stel een formule op van u in de vorm $u = b\sin(c(t - d))$. Rond b af op twee decimalen en d op vier decimalen.

Aanpak
Zorg dat je één trilling op je scherm krijgt, dus neem Xmin = 0 en Xmax $= \dfrac{2\pi}{30\pi} = \frac{1}{15}$.

Uitwerking
u_1 en u_2 hebben dezelfde frequentie, dus $c = 30\pi$.
Voer in $y_1 = 5\sin(30\pi x) + 6\sin\left(30\pi x - \frac{3}{10}\pi\right)$.
De optie maximum geeft $x \approx 0{,}02$ en $y \approx 9{,}81$, dus $b = 9{,}81$.
De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x \approx 0{,}0055$, dus $d = 0{,}0055$.
Dus $u = 9{,}81\sin(30\pi(t - 0{,}0055))$.



42 De uitwijking van een trillend punt wordt gegeven door $u = 3\sin(500\pi t) + 4\sin\left(500\pi t - \frac{2}{5}\pi\right)$ met u in mm en t in seconden.

a Schrijf de formule van u in de vorm $u = b\sin(ct - d)$. Rond b en d af op twee decimalen.
b Hoeveel meter legt het punt af in 1 seconde?
c Bereken algebraïsch de snelheid van het punt op $t = 0$. Geef het antwoord in gehele km/uur.

A 43 Gegeven is de samengestelde trilling $u = \sin(t) + 2\cos(t)$.
Stel de formule op van u in de vorm $u = b\sin(t - d)$. Rond b en d af op twee decimalen.

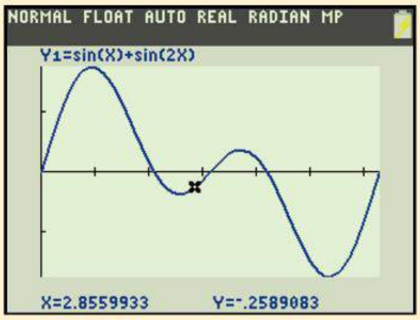
O 44 Gegeven zijn de samengestelde trillingen $u_1 = \sin(2t) + \sin(3t)$ en $u_2 = \sin(2t) + \sin(4t)$.

a Plot de grafiek van u_1 en licht toe dat de periode van u_1 gelijk is aan 2π.

b Plot de grafiek van u_2 en licht toe dat de periode van u_2 gelijk is aan π.

Theorie D Trillingen met verschillende frequenties

In figuur 12.19 is de grafiek van $y = \sin(x) + \sin(2x)$ geplot.
De grafiek is geen sinusoïde, dus je kunt de formule niet schrijven in de vorm $y = a + b\sin(cx - d)$. De grafiek is echter wel periodiek.
In dit soort situaties kun je beredeneren wat de periode is.



figuur 12.19 De grafiek van $y = \sin(x) + \sin(2x)$ heeft periode 2π.

Heb je te maken met $u = \sin(6t) + \sin(9t)$ dan krijg je,
de trillingstijd van $u = \sin(6t)$ is $\frac{2\pi}{6}$ en
de trillingstijd van $u = \sin(9t)$ is $\frac{2\pi}{9}$.

In $[0, 2\pi]$ passen precies 6 periodes van $u = \sin(6t)$ en precies 9 periodes van $u = \sin(9t)$. Omdat 6 en 9 beide door 3 gedeeld kunnen worden geldt: in $\left[0, \frac{2}{3}\pi\right]$ passen precies 2 periodes van $u = \sin(6t)$ en precies 3 periodes van $u = \sin(9t)$. Dus de periode van $u = \sin(6t) + \sin(9t)$ is $\frac{2}{3}\pi$.

Ook van $y = 2\sin(6t) + 5\sin(9t)$ is de periode $\frac{2}{3}\pi$.

Voorbeeld

Gegeven is de samengestelde trilling $u = \sin(800\pi t) + 4\sin(806\pi t)$ met t in seconden.
Bereken de periode.

Uitwerking

	$u_1 = \sin(800\pi t)$	$u_2 = 4\sin(806\pi t)$
in $[0, 2\pi]$	800π periodes	806π periodes
in $[0, 1]$	400 periodes	403 periodes

Deel door 2π.

Dus de periode van u is 1 seconde.

45 In deze opgave is t de tijd in seconden.
Bereken de periode van de samengestelde trilling.

a $u = \sin(100\pi t) + \sin(101\pi t)$
b $u = \sin(100t) + \sin(101t)$
c $u = 5\sin(100\pi t) + \sin(105\pi t)$
d $u = 3\sin\left(\frac{1}{4}\pi t\right) + 6\sin\left(\frac{1}{5}\pi t\right)$

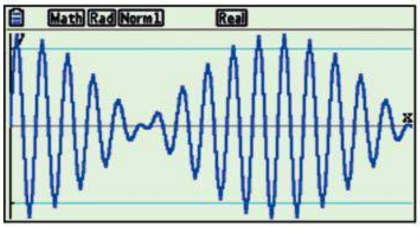
46 Bij een piano zijn de trillingen van de twee snaren die horen bij de e′-toets te beschrijven met $u_1 = \sin(660\pi t)$ en $u_2 = \sin(661\pi t)$ met t in seconden.
Omdat de trillingen elkaar beurtelings versterken en uitdoven, gaat deze toon zweven. Daarom moet de piano gestemd worden.
Wat is de periode van de zweving? Licht toe.

47 De toon die hoort bij de f′-toets van een piano kan worden beschreven door de formule
$u = 1{,}5\sin(700\pi t) + 0{,}2\sin(1400\pi t) + 0{,}3\sin(2100\pi t) + 0{,}1\sin(2800\pi t)$
met t in seconden. De trilling is samengesteld uit de grondtoon $u_1 = 1{,}5\sin(700\pi t)$ en drie boventonen.

a Bereken de frequenties van de boventonen.
b Bereken de periode van de samengestelde trilling.

A 48 Gegeven zijn de trillingen $u_1 = 0{,}6\sin(500\pi t)$, $u_2 = 0{,}6\sin(550\pi t)$ en $u_3 = 0{,}6\sin(500\pi t - 0{,}5\pi)$ met u in cm en t in seconden.

a Bereken de periode van de trilling $u_4 = u_1 + u_2$.
b De samenstelling van u_1 en u_2 veroorzaakt zweving. Deze zweving is op het GR scherm hiernaast zichtbaar gemaakt. Hierin is Xmin = 0.
Welke Xmax is gekozen?
c Stel een formule op van $u_5 = u_1 + u_3$ in de vorm $u = b\sin(ct - d)$. Rond zo nodig af op twee decimalen.



figuur 12.20

Informatief Jean Baptiste Fourier

In de achttiende eeuw hebben wetenschappers gezocht naar formules waarmee je trillende (viool)snaren kunt beschrijven.
Het geluid van een muziektoon probeerde men vast te leggen door middel van een periodieke functie. De grote doorbraak was de ontdekking van de Franse wis- en natuurkundige Jean Baptiste Fourier (1768-1830) die vaststelde dat elke (stuksgewijs gladde) periodieke functie te schrijven is

als $y = A + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\left(\frac{n \cdot 2\pi t}{T}\right) + \cos\left(\frac{n \cdot 2\pi t}{T}\right)\right)$.

Daarmee werd Fourier de grondlegger van de moderne geluidsleer.

Terugblik

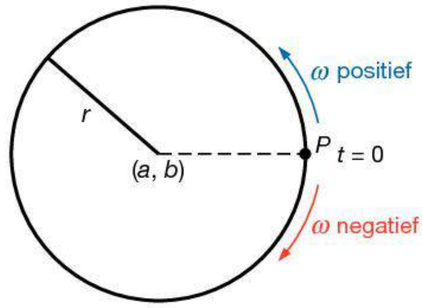
Eenparige cirkelbeweging

Doorloopt het punt P met hoeksnelheid ω de cirkel met middelpunt (a, b) en straal r en bevindt P zich op $t = 0$ in het punt $(a + r, b)$, dan hoort hierbij de parametervoorstelling

$$\begin{cases} x_P(t) = a + r\cos(\omega t) \\ y_P(t) = b + r\sin(\omega t) \end{cases}$$

De omlooptijd van P is $T = \dfrac{2\pi}{|\omega|}$.

Het punt P voert een eenparige cirkelbeweging uit.



Harmonische trilling

Bij de eenparige cirkelbeweging van het punt P, beschreven door $\begin{cases} x(t) = 10\cos\left(\frac{1}{4}\pi t\right) \\ y(t) = 10\sin\left(\frac{1}{4}\pi t\right) \end{cases}$ voert de projectie P' van P op de y-as een harmonische trilling uit die beschreven wordt door $y = 10\sin\left(\frac{1}{4}\pi t\right)$.

Is t in seconden, dan is de trillingstijd $T = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{4}\pi} = 8$ seconden en de frequentie $f = \dfrac{\frac{1}{4}\pi}{2\pi} = \frac{1}{8}$ hertz.

Trillingen met gelijke frequentie

De harmonische trillingen $u_1 = 0{,}5\sin(10\pi t)$ en $u_2 = 0{,}8\sin\left(10\pi t - \frac{2}{5}\pi\right)$ hebben beide trillingstijd $T = \dfrac{2\pi}{10\pi} = \frac{1}{5}$. Daarom is de samengestelde trilling $u = u_1 + u_2$ een harmonische trilling met trillingstijd $\frac{1}{5}$. De formule van u is van de vorm $u = b\sin(10\pi t - d)$.
Met de GR vind je $b \approx 1{,}07$ en $d \approx 0{,}79$. Dus $u = 1{,}07\sin(10\pi t - 0{,}79)$.

Trillingen met verschillende frequenties

Trilling $u_1 = 0{,}5\sin(10\pi t)$ heeft trillingstijd $\dfrac{2\pi}{10\pi}$ en trilling $u_2 = 0{,}8\sin(11\pi t)$ heeft trillingstijd $\dfrac{2\pi}{11\pi}$.

In $[0, 2\pi]$ passen precies 10π periodes van u_1 en precies 11π periodes van u_2.
Dus in $[0, 2]$ passen precies 10 periodes van u_1 en precies 11 periodes van u_2.
Daarom heeft $u = u_1 + u_2$ een periode van 2.
De grafiek van u is geen sinusoïde, dus de formule van u is niet te schrijven in de vorm $u = b\sin(ct - d)$.

12

12.4 Bewegingsvergelijkingen

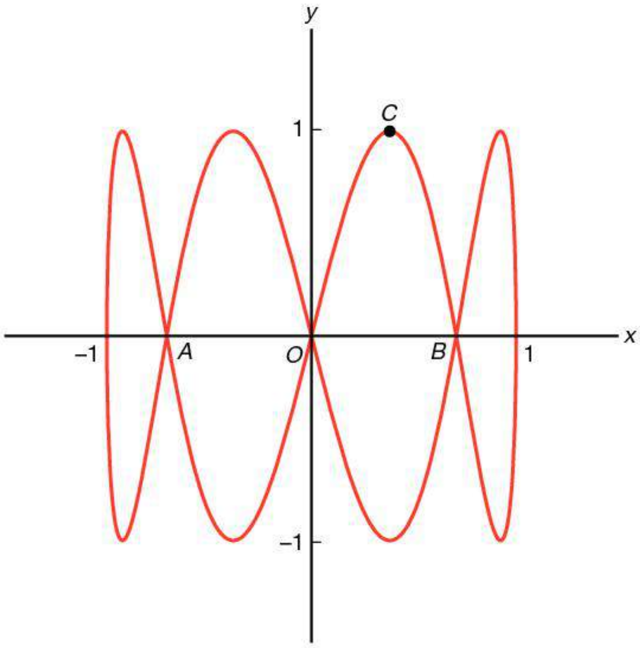
O 49 De baan van een punt P is gegeven door de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin(4t) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

De baan snijdt de x-as behalve in de oorsprong, (−1, 0) en (1, 0) ook in de punten A en B. Zie figuur 12.21.

a Bereken x_A en x_B exact.

b De x-coördinaat van de top C is in twee decimalen nauwkeurig gelijk aan 0,38.
Bereken x_C in drie decimalen nauwkeurig.



figuur 12.21

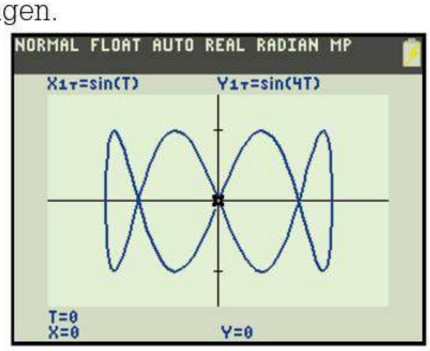
Theorie A Lengten, hoeken en snelheden

In deze paragraaf krijg je te maken met bewegingsvergelijkingen waarbij $x(t)$ en $y(t)$ functies zijn met een sinus of een cosinus en waarbij geen eenparige cirkelbeweging hoort. Neem je de parameter t op $\mathbb{R}$ dan wordt de baan oneindig vaak doorlopen. Daarom nemen we t vaak op een beperkt interval, bijvoorbeeld op $[0, 2\pi]$. Zo wordt de baan in opgave 49 op $[0, 2\pi]$ één keer doorlopen. Neem je t op $[0, 4\pi]$ dan wordt de baan twee keer doorlopen.

Neem je $\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(8t) \end{cases}$ met t op $[0, 2\pi]$, dan wordt de baan in figuur 12.21 ook twee keer doorlopen.

Informatief Bewegingsvergelijkingen en de GR

Op bladzijde 94 heb je kunnen lezen hoe je de baan van een parameterkromme kunt plotten op de GR. Ook de krommen in deze paragraaf kun je plotten met de instelling voor parametervoorstellingen.
Om de kromme die gegeven is door $x(t) = \sin(t)$ en $y(t) = \sin(4t)$ met t op $[0, 2\pi]$ te plotten neem je Tmin = 0, Tmax = 2π, Tstep = 0,05 (bijvoorbeeld), Xmin = −1,5, Xmax = 1,5, Ymin = −1,5 en Ymax = 1,5.
Neem je t op $[0, 4\pi]$, dan zie je dat de baan twee keer wordt doorlopen.
Neem je t op $[0, \pi]$, dan wordt de helft van de baan doorlopen.



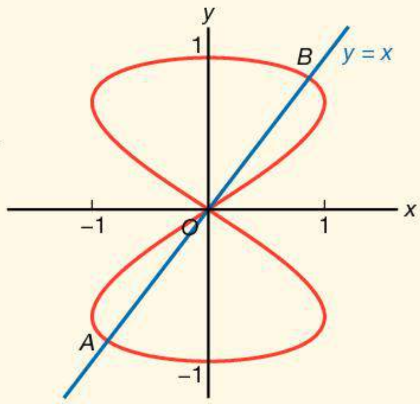
Voorbeeld

De baan van een punt P is gegeven door $\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$

met t op $[0, 2\pi]$.

De punten A en B zijn snijpunten van de baan met de lijn $y = x$.
Zie figuur 12.22.

a Bereken exact de lengte van het lijnstuk AB.
b Bereken exact de baansnelheid van P in het punt B.
c Bereken in graden in één decimaal nauwkeurig de hoek die de baan in B maakt met de lijn $y = x$.



figuur 12.22

Uitwerking

a $x = \sin(2t)$ en $y = \sin(t)$ substitueren in $y = x$ geeft
$\sin(t) = \sin(2t)$
$t = 2t + k \cdot 2\pi \vee t = \pi - 2t + k \cdot 2\pi$
$-t = k \cdot 2\pi \vee 3t = \pi + k \cdot 2\pi$
$t = k \cdot 2\pi \vee t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$
t op $[0, 2\pi]$ geeft $t = 0 \vee t = \frac{1}{3}\pi \vee t = \pi \vee t = 1\frac{2}{3}\pi \vee t = 2\pi$
$t = 0, t = \pi$ en $t = 2\pi$ geven de oorsprong.
$x\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $x\left(1\frac{2}{3}\pi\right) = \sin\left(3\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Dus $A\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ en $B\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.

$AB = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{3 + 3} = \sqrt{6}$

b $x(t) = \sin(2t)$ geeft $x'(t) = 2\cos(2t)$
$y(t) = \sin(t)$ geeft $y'(t) = \cos(t)$

De baansnelheid in B is $\left|\vec{v}\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right| = \sqrt{\left(2\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)^2 + \left(\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right)^2} = \sqrt{\left(2 \cdot -\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{(-1)^2 + \frac{1}{4}} = \sqrt{1\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

c $\vec{v}\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \begin{pmatrix} x'\left(\frac{1}{3}\pi\right) \\ y'\left(\frac{1}{3}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) \\ \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\vec{r}_{y=x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

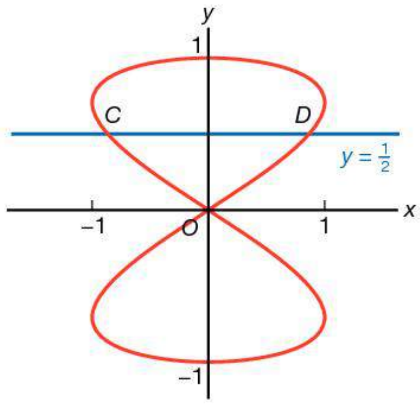
$\cos(\varphi) = \dfrac{\left|-1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1\right|}{\sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{\left|-\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2\frac{1}{2}}}$

Dus $\varphi \approx 71{,}6^\circ$.

12

50 In figuur 12.23 zie je nog eens de baan van het punt P van het voorbeeld. De baan snijdt de lijn $y = \frac{1}{2}$ in de punten C en D.

- **a** Bereken exact de lengte van het lijnstuk CD.
- **b** Bereken exact de baansnelheid van P in het punt D.
- **c** Bereken in graden in één decimaal nauwkeurig de hoek die de baan in D maakt met de lijn $y = \frac{1}{2}$.
- **d** Bereken in graden in één decimaal nauwkeurig de hoek waaronder de baan zichzelf snijdt in de oorsprong.



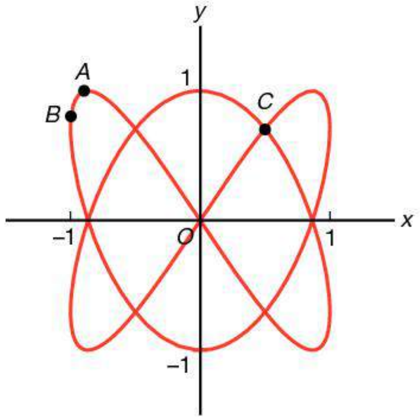
figuur 12.23

51 De baan van een punt P is gegeven door

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Zie de baan in figuur 12.24. In het punt A is de raaklijn horizontaal en in het punt B is de raaklijn verticaal. In het punt C snijdt de baan zichzelf.

- **a** Bereken exact de coördinaten van A en B.
- **b** De lijn $y = x$ snijdt de baan van P behalve in de oorsprong nog in vier punten.
  Bereken exact van deze punten de bijbehorende waarden van t.
- **c** Toon aan dat C de coördinaten $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ heeft.
- **d** Bereken exact de baansnelheid waarmee P voor het eerst in C is.
- **e** Bereken in graden nauwkeurig de hoek waaronder de baan zichzelf snijdt in de oorsprong.



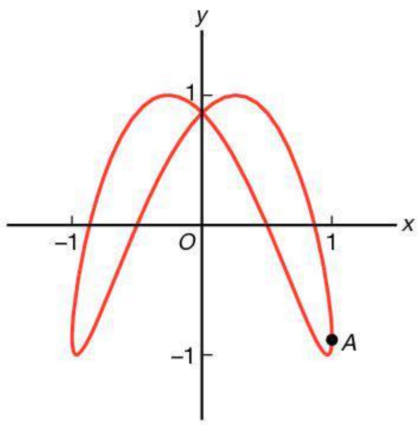
figuur 12.24

52 De baan van een punt P is gegeven door

$$\begin{cases} x(t) = \sin\left(t - \frac{1}{6}\pi\right) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases} \text{ met } t \text{ op } [0, 2\pi].$$

De baan is getekend in figuur 12.25. In punt A is de raaklijn verticaal.

- **a** Bereken de coördinaten van A.
- **b** De lijn $x = \frac{1}{2}$ snijdt de baan in de punten B en C.
  Bereken exact de lengte van het lijnstuk BC.
- **c** Bereken exact de t-waarden van de snijpunten van de baan met de lijn $y = x$.
- **d** De baan snijdt zichzelf in het punt $\left(0, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.
  Bereken de hoek waaronder dit gebeurt.
- **e** Bereken exact de baansnelheid van P op $t = \frac{1}{3}\pi$.



figuur 12.25

12

A 53 De baan van een punt P is gegeven door de bewegingsvergelijkingen
$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin\left(t + \frac{1}{3}\pi\right) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$
Zie figuur 12.26. De snijpunten van de baan met de y-as zijn A, B, C en D.

a Bereken exact de coördinaten van A, B, C en D.

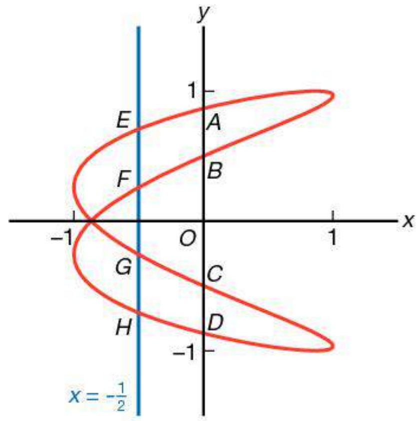
De lijn $x = -\frac{1}{2}$ snijdt de baan in de punten E, F, G en H.

b Bereken exact de lengte van het lijnstuk EH.

c Bereken in graden nauwkeurig de hoek die de baan in het punt B met de y-as maakt.

d Bereken exact de baansnelheid van P in het punt E.

e Op $t = a$ bevindt het punt zich in T en op $t = a + \pi$ in U. Toon aan dat de lengte van TU gelijk is aan $\left|2\sin\left(a + \frac{1}{3}\pi\right)\right|$.



figuur 12.26

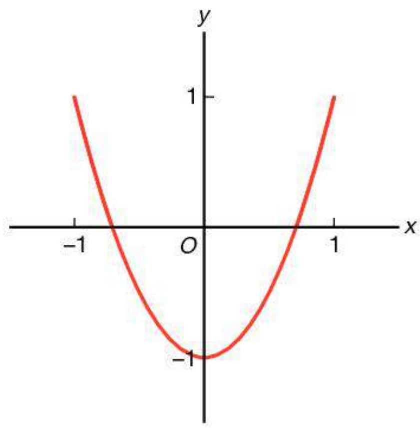
O 54 De baan van een punt P is gegeven door
$$\begin{cases} x(t) = \sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

a Vul de tabel in.

t	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$1\frac{1}{4}\pi$
x			
y			

De baan is getekend in figuur 12.27.
Bij de grafiek hoort een formule van de vorm $y = px^2 + q$.

b Welke waarden van p en q volgen uit de figuur?



figuur 12.27

Theorie B Formules bij parametervoorstellingen

In opgave 54 heb je de formule $y = 2x^2 - 1$ gevonden. Om aan te tonen dat elk punt van de kromme met parametervoorstelling
$$\begin{cases} x(t) = \sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases} \text{ op de parabool } y = 2x^2 - 1 \text{ ligt, substitueer je}$$
$x = \sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)$ en $y = \sin(2t)$ in $y = 2x^2 - 1$ en laat je zien dat dit een juiste bewering geeft.
Omdat bij $x(t) = \sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)$ het bereik $= [-1, 1]$ is, geldt $-1 \leq x \leq 1$, dus je krijgt maar een gedeelte van de parabool.

12

Voorbeeld

Bij de parametervoorstelling $\begin{cases} x(t) = \sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$

hoort de formule $y = 2x^2 - 1$ met $-1 \leq x \leq 1$.

Toon dit aan.

Uitwerking

Substitutie van $x = \sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)$ en $y = \sin(2t)$ in $y = 2x^2 - 1$ geeft

$\sin(2t) = 2\left(\sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)\right)^2 - 1$ $\quad\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$, dus $2\sin^2(A) - 1 = -\cos(2A)$

$\sin(2t) = -\cos\left(2\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)\right)$

$\sin(2t) = -\cos\left(2t + \frac{1}{2}\pi\right)$ $\quad -\cos(A) = \cos(A + \pi)$

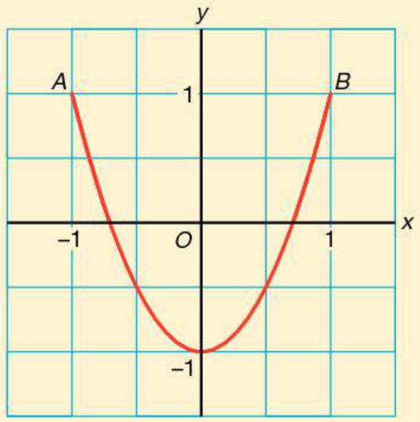
$\sin(2t) = \cos\left(2t + 1\frac{1}{2}\pi\right)$ $\quad \cos(A) = \sin\left(A + \frac{1}{2}\pi\right)$

$\sin(2t) = \sin(2t + 2\pi)$ $\quad \sin(A + 2\pi) = \sin(A)$

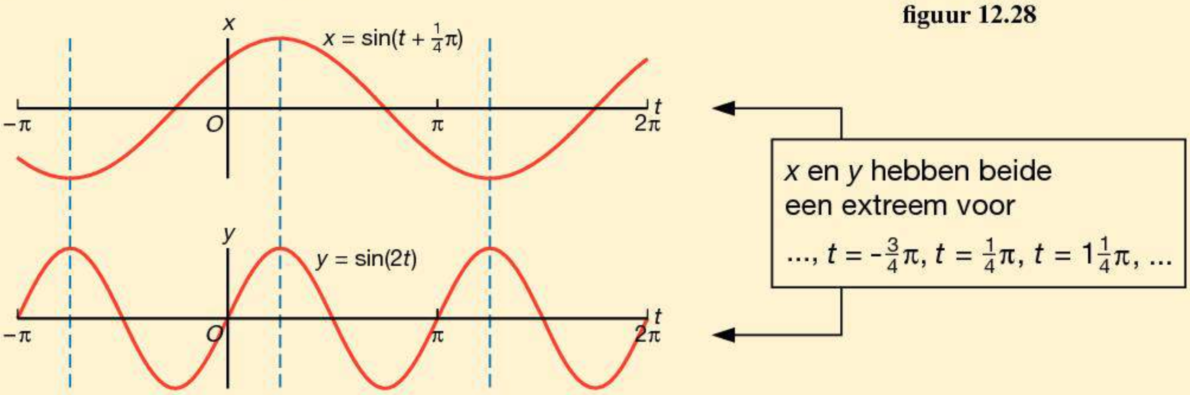
$\sin(2t) = \sin(2t)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Dit klopt voor elke } t. \\ x = \sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right) \\ -1 \leq \sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right) \leq 1 \end{array}\right\} \text{Bij de pv hoort de formule } y = 2x^2 - 1 \text{ met } -1 \leq x \leq 1.$$

De baan van een bewegend punt P die beschreven wordt door $\begin{cases} x(t) = \sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$ is dat deel van de parabool $y = 2x^2 - 1$ waarvoor $-1 \leq x \leq 1$.
Neem je t op $\mathbb{R}$ dan doorloopt P voortdurend de parabool tussen $A(-1, 1)$ en $B(1, 1)$.
In deze punten keert de richting waarin P beweegt om, daarom heten deze punten **keerpunten**.
In keerpunten hebben de formules voor x en y uit de parametervoorstelling beide een extreme waarde.



figuur 12.28



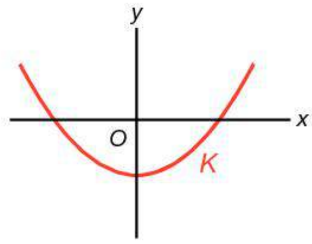
figuur 12.29

55 Bij de grafiek met parametervoorstelling $\begin{cases} x(t) = \sin\left(t - \frac{1}{4}\pi\right) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$

hoort de formule $y = -2x^2 + 1$ met $-1 \leq x \leq 1$.
Toon dit aan.

56 In figuur 12.30 is de kromme K getekend die gegeven is door
$\begin{cases} x(t) = 2\sin(t) \\ y(t) = \sin\left(2t - \frac{1}{2}\pi\right) \end{cases}$

a Bereken de coördinaten van de keerpunten van K.
b Welke formule hoort vermoedelijk bij K?
Toon aan dat dit juist is.



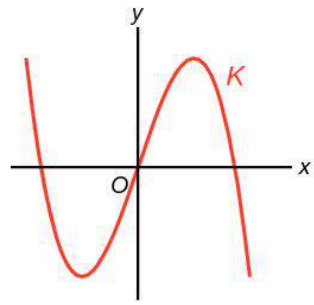
figuur 12.30

A 57 De baan van het punt P is gegeven door de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$

Bij de baan van P hoort de formule $y^2 = 4x^2 - 4x^4$ met $-1 \leq x \leq 1$.
Toon dit aan.

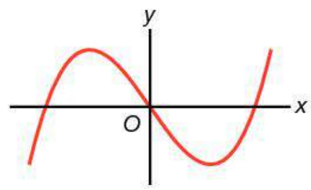
A 58 In figuur 12.31 is de kromme K getekend die gegeven is door
$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}$

a Bereken de coördinaten van de keerpunten van K.
b Toon aan dat alle punten van K op de grafiek van $y = 3x - 4x^3$ liggen.



figuur 12.31

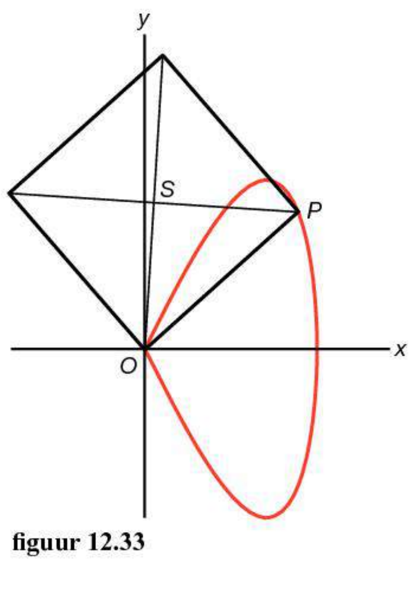
D 59 De baan van het punt P wordt beschreven door de bewegingsvergelijkingen $x(t) = 2\cos(t)$ en $y(t) = \cos(3t)$.
Zie figuur 12.32.
Bij de baan van P hoort een formule van de vorm $y = ax^3 + bx$ met $c \leq x \leq d$.
Bereken a, b, c en d en toon aan dat deze formule juist is.



figuur 12.32

O 60 De baan van het punt P is gegeven door
$\begin{cases} x_P(t) = 2\sin(t) \\ y_P(t) = 2\sin(2t) \end{cases}$ met $0 < t < \pi$.

Het lijnstuk OP is de zijde van een vierkant zoals in figuur 12.33 is getekend.
Het punt S is het middelpunt van dit vierkant.
Als het punt P zijn baan beschrijft, verandert punt S mee.
We vragen ons af wat de bewegingsvergelijkingen van S zijn.
Er geldt $\vec{s} = \frac{1}{2}\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{p}_{\mathrm{L}}$.
Licht dit toe.



figuur 12.33

12

Theorie C Bewegingsvergelijkingen van meebewegende punten

In opgave 60 beschrijft het punt S een baan die afhangt van de baan van het punt P. Om de bewegingsvergelijkingen van de baan van S te vinden gebruik je een rotatie van een vector over 90°.

Voorbeeld

De baan van het punt P is gegeven door

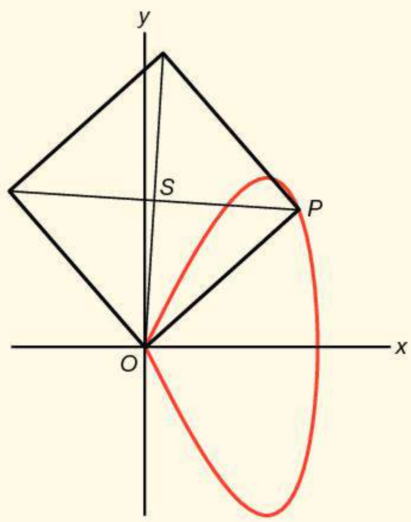
$$\begin{cases} x_P(t) = 2\sin(t) \\ y_P(t) = 2\sin(2t) \end{cases} \text{ met } 0 < t < \pi.$$

Het lijnstuk OP is de zijde van een vierkant zoals in de figuur hiernaast.
Het punt S is het middelpunt van dit vierkant.

a Stel de bewegingsvergelijkingen van S op.

De baan van S snijdt de y-as één keer.

b Bereken exact de coördinaten van dit snijpunt.



figuur 12.34

Uitwerking

a $\vec{s} = \frac{1}{2}\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{p}_L$

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ 2\sin(2t) \end{pmatrix} \text{ geeft } \vec{p}_L = \begin{pmatrix} -2\sin(2t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{s} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ 2\sin(2t) \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2\sin(2t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t) - \sin(2t) \\ \sin(2t) + \sin(t) \end{pmatrix}$$

De bewegingsvergelijkingen van S zijn $\begin{cases} x_S(t) = \sin(t) - \sin(2t) \\ y_S(t) = \sin(2t) + \sin(t) \end{cases}$

b Snijden met de y-as geeft $\sin(t) - \sin(2t) = 0$

$$\begin{aligned} &\sin(t) = \sin(2t) \\ &t = 2t + k \cdot 2\pi \vee t = \pi - 2t + k \cdot 2\pi \\ &-t = k \cdot 2\pi \vee 3t = \pi + k \cdot 2\pi \\ &t = k \cdot 2\pi \vee t = \tfrac{1}{3}\pi + k \cdot \tfrac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

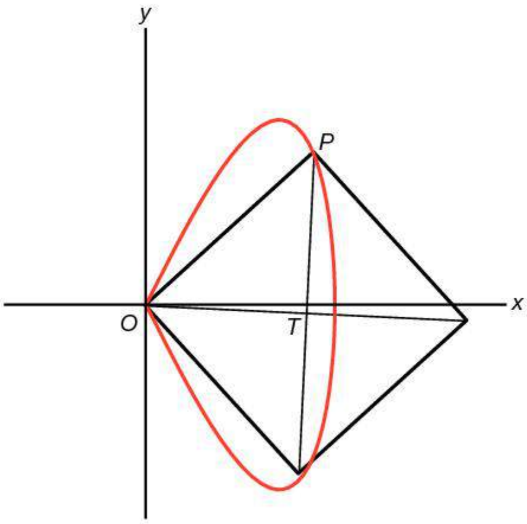
t op $\langle 0, \pi \rangle$ geeft $t = \frac{1}{3}\pi$

$y_S\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) + \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3}$

Dus $S\left(0, \sqrt{3}\right)$.

61 Zie het voorbeeld.
Nu wordt het vierkant aan de andere kant van het lijnstuk OP geplaatst zoals in figuur 12.35.
Het punt T is het middelpunt van het vierkant dat zo ontstaat.

a Stel de bewegingsvergelijkingen op van T.



figuur 12.35

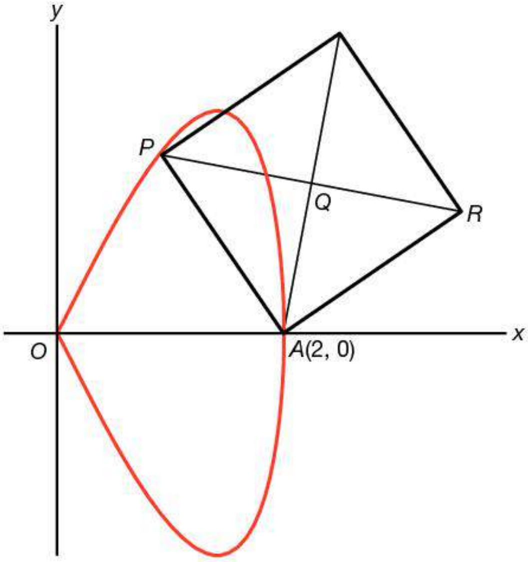
In figuur 12.36 zie je nog eens de baan van het punt P van het voorbeeld. Verder is het punt $A(2, 0)$ getekend. Ook zie je een vierkant waarvan AP een zijde is.
Het punt Q is het middelpunt van het vierkant dat zo ontstaat.

b Stel de bewegingsvergelijkingen op van Q.

In figuur 12.36 is ook het hoekpunt R van het vierkant getekend.

c Stel de bewegingsvergelijkingen op van R.

d De baan van het punt R snijdt de lijn $y = 1$ twee keer.
Bereken exact de coördinaten van de snijpunten.

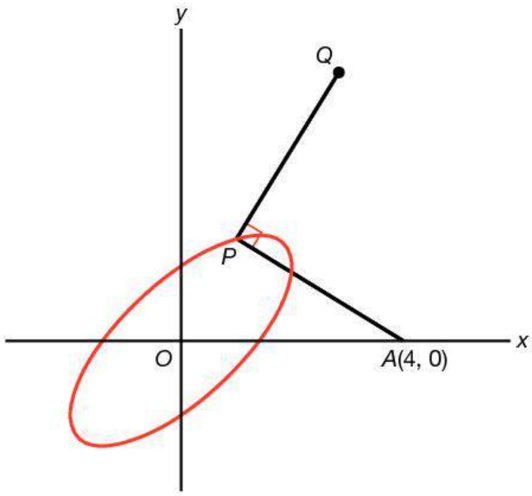


figuur 12.36

62 De baan van het punt P is gegeven door
$$\begin{cases} x_P(t) = 2\sin(t) \\ y_P(t) = 2\sin\left(t - \frac{1}{4}\pi\right) \end{cases} \quad \text{met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$
Verder is gegeven het punt $A(4, 0)$.
Het lijnstuk PQ met $PQ = AP$ staat loodrecht op AP zoals in figuur 12.37 is getekend.
Als het punt P zijn baan beschrijft, beweegt het punt Q mee.

a Stel de bewegingsvergelijkingen op van Q.

b Onderzoek of het laagste punt van de baan van Q hoger ligt dan het hoogste punt van de baan van P.



figuur 12.37

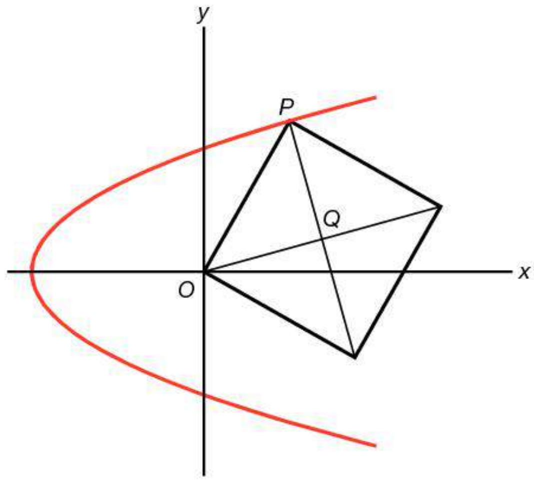
12

A 63 De baan van het punt P is gegeven door

$$\begin{cases} x_P(t) = 2\sin(2t) \\ y_P(t) = 2\sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right) \end{cases} \quad \text{met } \tfrac{1}{4}\pi \leq t \leq 1\tfrac{1}{4}\pi.$$

In figuur 12.38 zie je de baan van P.
Het lijnstuk OP is de zijde van een vierkant zoals in de figuur getekend. Het punt Q is het middelpunt van dit vierkant.
Als P zijn baan beschrijft verandert Q mee.

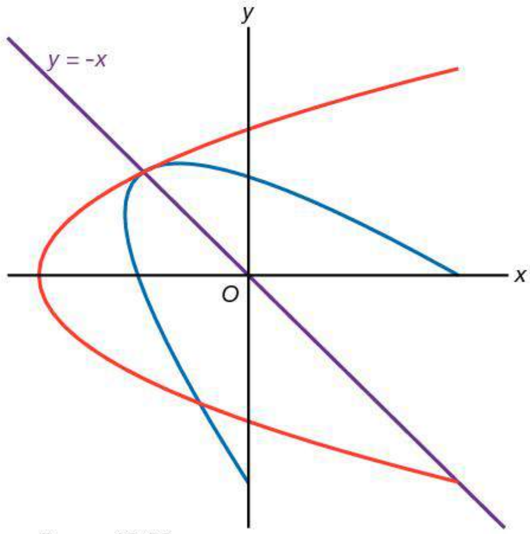
a Stel de bewegingsvergelijkingen op van Q.



figuur 12.38

In figuur 12.39 is ook de baan van Q getekend samen met de lijn $y = -x$.
Het lijkt of de banen van P en Q elkaar raken op de lijn $y = -x$.

b Onderzoek of dit inderdaad het geval is.



figuur 12.39

A 64 De baan van het punt P is gegeven door

$$\begin{cases} x_P(t) = 4\cos(t) \\ y_P(t) = 6\sin(t) \end{cases} \quad \text{met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

In figuur 12.40 zie je de baan van P.
Het lijnstuk AP met $A(4, 0)$ is de zijde van een vierkant zoals in de figuur is getekend.
Het punt S is het middelpunt van dit vierkant.

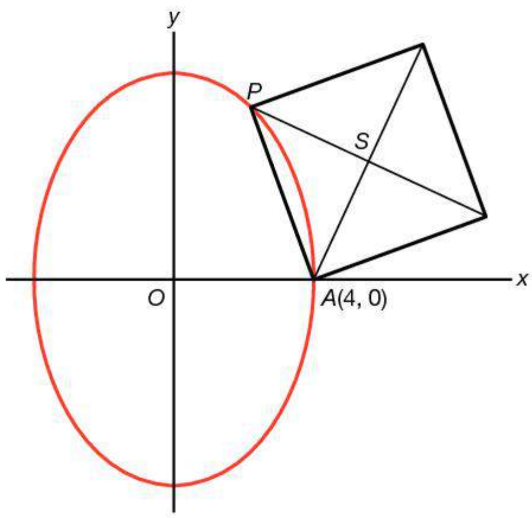
a Stel de bewegingsvergelijkingen op van S.

Bij de baan van P hoort de formule $9x^2 + 4y^2 = 144$.

b Toon dit aan.

De banen van P en S snijden elkaar behalve in het punt $A(4, 0)$ ook in het punt B.

c Bereken de coördinaten van het punt B. Rond af op twee decimalen.

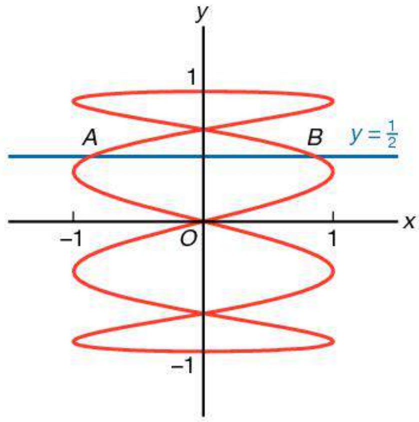


figuur 12.40

12

Terugblik

Lengten, hoeken en snelheden



In de figuur hiernaast zie je de baan van het punt P die gegeven is door $\begin{cases} x(t) = \sin(4t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$ met $0 \leq t \leq 2\pi$.

De snijpunten van de baan met de lijn $y = \frac{1}{2}$ zijn A en B.

Om exact de lengte van het lijnstuk AB te berekenen los je op $\sin(t) = \frac{1}{2}$. Dit geeft $t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$.

Omdat $x\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $x\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \sin\left(3\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ is $A\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$ en $B\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$ dus $AB = \sqrt{3}$.

Om de hoek α te berekenen waaronder de baan de lijn $y = \frac{1}{2}$ snijdt in het punt A, bereken je de richtingscoëfficiënt van de raaklijn k in A. Omdat $x'(t) = 4\cos(4t)$ en $y'(t) = \cos(t)$ is

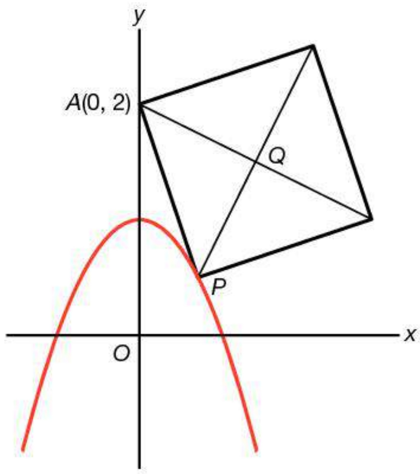
$\vec{r}_k = \begin{pmatrix} x'\left(\frac{5}{6}\pi\right) \\ y'\left(\frac{5}{6}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cos\left(3\frac{1}{3}\pi\right) \\ \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$, dus $\tan(\alpha) = \dfrac{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{-2} = \frac{1}{4}\sqrt{3}$.

De gevraagde hoek is $\alpha \approx 23{,}4°$.

Om de snelheid te berekenen waarmee P de lijn $y = \frac{1}{2}$ in A passeert bereken je $v\left(\frac{5}{6}\pi\right)$.

Je krijgt $v\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \sqrt{\left(x'\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right)^2 + \left(y'\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right)^2} = \sqrt{(-2)^2 + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{19}$.

Meebewegende punten



In de figuur hiernaast is de baan van het punt P met bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x_p(t) = \sin(t) \\ y_p(t) = \cos(2t) \end{cases}$ getekend. Verder zie je het punt $A(0, 2)$ en een vierkant waarvan AP een zijde is.
Het punt Q is het middelpunt van dit vierkant.
Als P zijn baan beschrijft, beweegt Q mee.
Om de bewegingsvergelijkingen van Q te vinden bedenk je dat

$\vec{q} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AP}_{\text{L}}$. Omdat $\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a} = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(2t) - 2 \end{pmatrix}$ is $\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}_{\text{L}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cos(2t) + 1 \\ \frac{1}{2}\sin(t) \end{pmatrix}$.

Zo krijg je $\vec{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin(t) \\ \frac{1}{2}\cos(2t) - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cos(2t) + 1 \\ \frac{1}{2}\sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{1}{2}\cos(2t) \\ 1 + \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{1}{2}\cos(2t) \end{pmatrix}$.

Dus de bewegingsvergelijkingen van Q zijn $\begin{cases} x_Q(t) = 1 + \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{1}{2}\cos(2t) \\ y_Q(t) = 1 + \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{1}{2}\cos(2t) \end{cases}$

12

Diagnostische toets

12.1 Goniometrische formules bij vergelijkingen en herleidingen

1 **a** Bereken exact de oplossingen van $\sin\left(3x - \frac{1}{4}\pi\right) = \cos(2x)$ op $[0, \pi]$.

b Bereken exact de oplossingen van $2\sin^2(2x) = \sin(2x) + 1$ op $[0, 2\pi]$.

c Bereken algebraïsch de oplossingen van $\cos\left(\frac{2}{5}\pi t\right) = -\sin\left(\frac{1}{6}\pi t\right)$ op $[0, 10]$.

2 Bereken exact de oplossingen.
a $\sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) = \sin(2x)\cos(2x)$
b $\sin^2(2x) + \frac{1}{4} = \cos(4x)$

12.2 Goniometrische formules bij symmetrie en primitiveren

3 Toon aan dat de grafiek van $f(x) = \sin(2x) + \cos(x)$ puntsymmetrisch is in het punt $\left(1\frac{1}{2}\pi, 0\right)$.

4 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = 2\sin(x)$ met domein $[0, \pi]$ en de x-as.
Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.

5 Gegeven is de functie $f(x) = 1 - 2\cos^2(x) - \cos(x)$ met domein $[0, \pi]$.
a Bereken exact het bereik van f.
b Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as.

12.3 Cirkelbewegingen en trillingen

6 De baan van punt P is gegeven door $\begin{cases} x(t) = -1 + 4\cos(2t) \\ y(t) = 4\sin(2t) \end{cases}$ met t op $\left[0, \frac{3}{4}\pi\right]$.

a Teken de baan van P.
b De baan van P snijdt de lijn $x = 1$ in het punt A.
Bereken exact de coördinaten van A.
c Bereken exact de lengte van het deel van de baan dat boven de lijn $y = 2$ ligt.

7 De punten P en Q voeren elk een harmonische trilling uit. Beide trillingen hebben dezelfde amplitude en frequentie. Voor de uitwijking van P geldt $u_P = 3\sin\left(\frac{1}{3}\pi t\right)$. Hierbij is u_P in dm en t in seconden met $t \geq 0$. Het punt Q komt steeds 2 seconden na het punt P op het hoogste punt.
a Geef een formule voor u_Q.
b Hoeveel meter legt P af in een minuut?
c Bereken algebraïsch de kleinste waarde van t waarvoor $u_P = u_Q$.

8 Gegeven zijn de harmonische trillingen $u_1 = 0{,}4\sin(8\pi t)$ en $u_2 = 0{,}2\sin(8\pi t - 0{,}4\pi)$.
Stel de formule op van $u_3 = u_1 + u_2$ in de vorm $u = b\sin(ct - d)$.
Rond b en d af op twee decimalen.

9 Bereken de periode van de samengestelde trilling.

a $u = \sin(10t) + \sin(15t)$ met t in seconden.

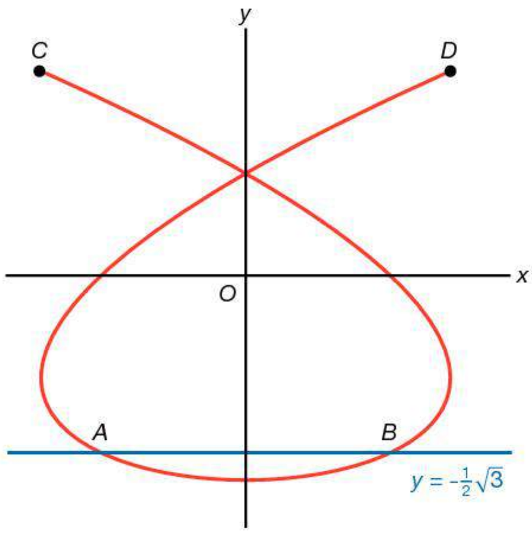
b $u = 2\sin(450\pi t) + \sin(400\pi t)$ met t in seconden.

12.4 Bewegingsvergelijkingen

10 De baan van een punt P is gegeven door

$$\begin{cases} x_P(t) = \sin(3t) \\ y_P(t) = \cos\left(2t - \frac{1}{3}\pi\right) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 1\tfrac{1}{2}\pi.$$

De baan snijdt de lijn $y = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ in de punten A en B en heeft de keerpunten C en D. Zie figuur 12.41.



figuur 12.41

a Bereken exact de lengte van lijnstuk AB.

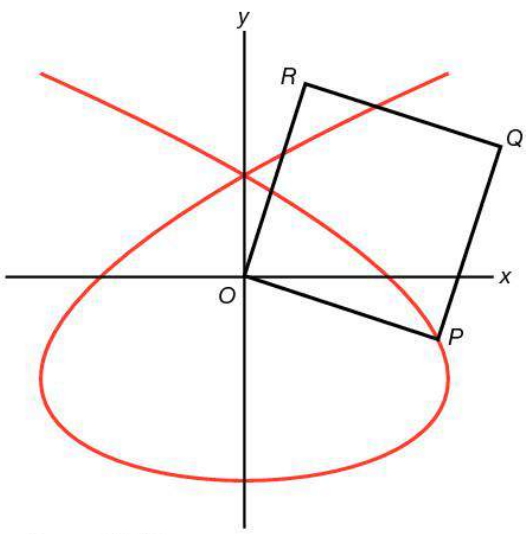
b Bereken de coördinaten van de keerpunten van de baan.

c Bereken in graden de hoek waaronder de baan zichzelf op de y-as snijdt.

d Bereken exact de baansnelheid in het snijpunt met de negatieve y-as.

Het lijnstuk OP is de zijde van het vierkant $OPQR$ zoals in de figuur hiernaast.

e Stel de bewegingsvergelijkingen op van Q en bereken exact de kleinste waarde van t waarvoor de baan van Q de positieve x-as snijdt.



figuur 12.42

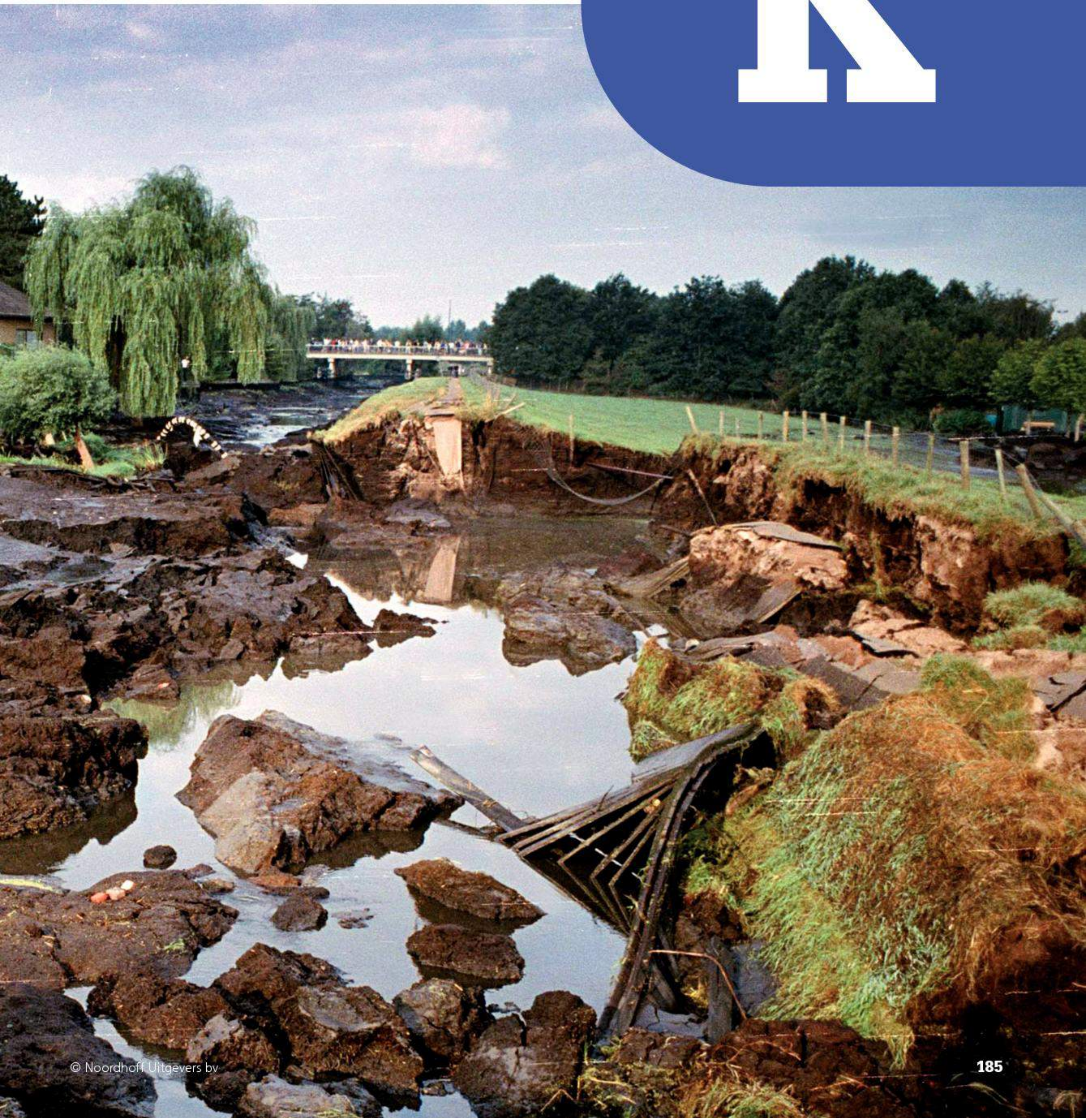
In de nacht van 25 op 26 augustus 2003 is in Wilnis een dijk van een ringvaart over een lengte van 60 meter in de richting van een achterliggende woonwijk verschoven, waardoor ongeveer 230 000 m^3 water de woonwijk is ingestroomd. In de straten van Wilnis kwam een halve meter water te staan en 1500 bewoners moesten worden geëvacueerd. Vier uur na de doorbraak was de toevoer van het water gestopt door het afdammen van de ringvaart.

Wat leer je?

- Primitieven berekenen met de substitutiemethode en met partieel integreren.
- Wat cyclometrische functies zijn.
- Hoe je met behulp van breuksplitsen primitieven kunt berekenen.
- Hoe je de oppervlakte berekent van een vlakdeel dat wordt ingesloten door een parameterkromme.

Voortgezette integraalrekening

K



Voorkennis Afgeleiden en primitieven

Theorie A Differentiëren

Regels voor het differentiëren

$f(x) = ax^n$ geeft $f'(x) = nax^{n-1}$

$f(x) = c \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = c \cdot g'(x)$

$s(x) = f(x) + g(x)$ geeft $s'(x) = f'(x) + g'(x)$ somregel

$p(x) = f(x) \cdot g(x)$ geeft $p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ productregel

$q(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)}$ geeft $q'(x) = \dfrac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$ quotiëntregel

$f(x) = u(v(x))$ geeft $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ kettingregel

$f(x) = \sin(x)$ geeft $f'(x) = \cos(x)$

$f(x) = \cos(x)$ geeft $f'(x) = -\sin(x)$

$f(x) = \tan(x)$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

$f(x) = \mathrm{e}^x$ geeft $f'(x) = \mathrm{e}^x$

$f(x) = g^x$ geeft $f'(x) = g^x \cdot \ln(g)$

$f(x) = \ln(x)$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$f(x) = {}^g\log(x)$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln(g)}$

1 Differentieer.

a $f(x) = \sqrt{6x+1}$

b $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{2x-1}}$

c $f(x) = \ln(x^2 + 2x)$

d $f(x) = 2^{4x-1}$

e $f(x) = \sin(x^2 - x)$

f $f(x) = \tan\left(4x - \frac{1}{3}\pi\right)$

2 Bereken de afgeleide.

a $f(x) = \mathrm{e}^x \sin(2x)$

b $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2+1}$

c $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln(x)$

d $f(x) = \dfrac{2^x + 1}{2^x}$

e $f(x) = 2x\tan(x)$

f $f(x) = \dfrac{4x+2}{\sqrt{2x+1}}$

K

Theorie B Primitiveren

Regels voor het primitiveren

$f(x) = ax^n$ geeft $F(x) = \dfrac{a}{n+1}x^{n+1} + c$ met $n \neq -1$

$f(x) = \sin(x)$ geeft $F(x) = -\cos(x) + c$

$f(x) = \cos(x)$ geeft $F(x) = \sin(x) + c$

$f(x) = e^x$ geeft $F(x) = e^x + c$

$f(x) = g^x$ geeft $F(x) = \dfrac{g^x}{\ln(g)} + c$

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ geeft $F(x) = \ln|x| + c$

$f(x) = \ln(x)$ geeft $F(x) = x\ln(x) - x + c$

$f(x) = {}^g\log(x)$ geeft $F(x) = \dfrac{1}{\ln(g)}(x\ln(x) - x) + c$

De primitieven van $f(ax + b)$ zijn $\dfrac{1}{a}F(ax + b) + c$.

3 Primitiveer.

a $f(x) = x^2 + \sin(x)$

b $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x^3}$

c $f(x) = 4 \cdot 3^x$

d $f(x) = \ln\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)$

e $f(x) = 6\log(3x)$

f $f(x) = \dfrac{4^x - 2^x + 1}{2^x}$

4 Primitiveer.

a $f(x) = e^{\frac{1}{2}x - 1}$

b $f(x) = \dfrac{3}{2x - 1}$

c $f(x) = 4\sin(\pi x)$

d $f(x) = \dfrac{4x + 1}{2\sqrt{4x + 1}}$

e $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x - 3}$

f $f(x) = 4\ln(x - 1)$

5 Bereken exact.

a $\displaystyle\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \sin(2x)\,dx$

b $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{6}{2x - 1}\,dx$

c $\displaystyle\int_{e}^{e^2} 10\ln(\sqrt[4]{x})\,dx$

d $\displaystyle\int_{0}^{4} 6e^{\frac{1}{2}x - 3}\,dx$

K

K.1 De substitutiemethode

O 1 Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x^2 + x)$.
a Toon aan dat $f'(x) = (2x + 1)\cos(x^2 + x)$.
b Licht toe dat $G(x) = \sin(x^2 + x) + 3$ een primitieve is van $g(x) = (2x + 1)\cos(x^2 + x)$.

Theorie A Primitiveren en de kettingregel

De afgeleide van de functie $f(x) = (x^2 + x)^5$ bereken je met de kettingregel.
Je krijgt $f'(x) = 5(x^2 + x)^4 (2x + 1)$.

$f(x) = (x^2 + x)^5 = (v(x))^5$
met $v(x) = x^2 + x$.

Om de kettingregel te kunnen gebruiken bij het primitiveren van $g(x) = 5(x^2 + x)^4 (2x + 1)$ gaan we omgekeerd te werk en noteren dit als volgt.

$$\int 5(x^2 + x)^4 (2x + 1)\,\mathrm{d}x = \int 5(x^2 + x)^4\,\mathrm{d}(x^2 + x) = \int 5(v(x))^4\,\mathrm{d}v(x)$$
$$= (v(x))^5 + c = (x^2 + x)^5 + c$$

In dit hoofdstuk gebruiken we u in plaats van $v(x)$.
De notatie wordt dan

$$\int 5(x^2 + x)^4 (2x + 1)\,\mathrm{d}x = \int 5(x^2 + x)^4\,\mathrm{d}(x^2 + x) = \int 5u^4\,\mathrm{d}u$$
$$= u^5 + c = (x^2 + x)^5 + c$$

Omdat $\dfrac{\mathrm{d}(x^2 + x)}{\mathrm{d}x} = 2x + 1$ is in de herleiding $(2x + 1)\,\mathrm{d}x$ vervangen door $\mathrm{d}(x^2 + x)$.

$f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$
dus
$f'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}f(x)$

In de herleiding is het integraalteken zonder grenzen gebruikt.
Zo'n integraal heet een **onbepaalde integraal**.
Een integraal met grenzen heet een **bepaalde integraal**.

De functie g is geprimitiveerd met de **substitutiemethode**.
'Substitueren' betekent zoals je weet 'vervangen door'.
Bij de functie g is $x^2 + x$ vervangen door u en daarmee lukte het primitiveren.

Is u een functie van x dan geldt
$$\int f(u)\cdot u'\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + c.$$

K

Voorbeeld

a Primitiveer $f(x) = 6x(x^2 + 1)^5$.

b Primitiveer $g(x) = \dfrac{10x^3}{\sqrt{x^4 + 7}}$.

Aanpak

a Merk op dat $[x^2 + 1]' = 2x$. Schrijf daarom $6x$ als $3 \cdot 2x$.

b Merk op dat $[x^4 + 7]' = 4x^3$. Schrijf daarom $10x^3$ als $2\frac{1}{2} \cdot 4x^3$.

Uitwerking

a $F(x) = \int 6x(x^2 + 1)^5\,\mathrm{d}x = \int 3 \cdot (x^2 + 1)^5 \cdot 2x\,\mathrm{d}x = \int 3(x^2 + 1)^5\,\mathrm{d}(x^2 + 1)$
$= \int 3u^5\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}u^6 + c = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^6 + c$

b $G(x) = \int \dfrac{10x^3}{\sqrt{x^4 + 7}}\,\mathrm{d}x = \int 2\frac{1}{2} \cdot (x^4 + 7)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4x^3\,\mathrm{d}x = \int 2\frac{1}{2}(x^4 + 7)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(x^4 + 7)$
$= \int 2\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u = 5u^{\frac{1}{2}} + c = 5\sqrt{u} + c = 5\sqrt{x^4 + 7} + c$

R 2 Zie het voorbeeld.

a Waarom lukt het primitiveren van $f(x) = 6x(x^2 + 1)^5$ wel op deze manier en het primitiveren van $h(x) = 6x(x^3 + 1)^5$ niet?

b Waarom lukt het primitiveren van $g(x) = \dfrac{10x^3}{\sqrt{x^4 + 7}}$ wel op deze manier en het primitiveren van $k(x) = \dfrac{10x^3}{\sqrt{x^4 + x}}$ niet?

c Voor welke waarde van a lukt het primitiveren van $l(x) = \dfrac{10x^3 + a}{\sqrt{x^4 + x}}$?

3 In de uitwerking van voorbeeld b staat $4x^3\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(x^4 + 7)$.
En zo is bijvoorbeeld $\sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(-\cos(x) + 2)$.
Vul in.

a $3x^2\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(... + 5)$

b $...\mathrm{d}x = \mathrm{d}(x^5 - 3)$

c $\cos(2x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(... + \pi)$

d $...\mathrm{d}x = \mathrm{d}\ln(x)$

e $(5 - 2x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(...)$

f $...\mathrm{d}x = \mathrm{d}\,\frac{1}{2}\sin(4x)$

4 Primitiveer.

a $f(x) = 2x(x^2 + 4)^3$

b $g(x) = 6x\sqrt{x^2 + 1}$

c $h(x) = 6x^2(x^3 - 1)^4$

d $j(x) = 3x^2\sin(x^3 - 1)$

5 Primitiveer.

a $f(x) = (3x - 4)^3$

b $f(x) = (2x - 3)\sqrt{2x - 3}$

c $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1 - x}}$

d $f(x) = \dfrac{6x}{3x^2 + 2}$

e $f(x) = \ln(4x + 1)$

f $f(x) = x\ln(x^2 + 1)$

K

A 6 Primitiveer.

a $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

b $g(x) = x\,e^{-x^2}$

c $h(x) = x\sqrt{5 - x^2}$

d $j(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

O 7 Gegeven is de functie $f(x) = \tan(x)$.
Om de functie f te primitiveren, noteren we deze als

$f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)} \cdot \sin(x)$.

a Licht toe dat deze notatie juist is.

b Licht toe dat $\displaystyle\int \tan(x)\,dx = \int \frac{-1}{\cos(x)}\,d\cos(x)$.

Theorie B Toepassingen van de substitutiemethode

Om de functie $f(x) = \tan(x)$ te primitiveren, gebruik je
$\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ en de substitutiemethode.

$$F(x) = \int \tan(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = \int \frac{-1}{\cos(x)} \cdot -\sin(x)\,dx$$
$$= \int -\frac{1}{\cos(x)}\,d\cos(x) = \int -\frac{1}{u}\,du = -\ln|u| + c = -\ln|\cos(x)| + c$$

$f(x) = \tan(x)$ geeft $F(x) = -\ln|\cos(x)| + c$

Ook de functie $g(x) = \sin^3(x)$ is te primitiveren met de substitutiemethode.
Hiertoe herleid je $\sin^3(x)$ tot $(\cos^2(x) - 1) \cdot -\sin(x)$.

$$G(x) = \int \sin^3(x)\,dx = \int \sin^2(x) \cdot \sin(x)\,dx = \int -(1 - \cos^2(x)) \cdot -\sin(x)dx$$
$$= \int (\cos^2(x) - 1)\,d\cos(x) = \int (u^2 - 1)\,du = \tfrac{1}{3}u^3 - u + c$$
$$= \tfrac{1}{3}\cos^3(x) - \cos(x) + c$$

In het voorbeeld op de volgende bladzijde wordt $\displaystyle\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \cos^3(x)\,dx$
met de substitutiemethode berekend. De grenzen $\frac{1}{6}\pi$ en $\frac{1}{4}\pi$ horen bij de variabele x.
Nadat is overgestapt op de variabele $u = \sin(x)$ moeten de grenzen van u bij de integraal worden genoteerd.
Omdat $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$ en $\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ horen bij u de grenzen $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

In de tussenstap met $\displaystyle\int (1 - \sin^2(x))\,d\sin(x)$ schrijven we bij de integraal de grenzen $x = \frac{1}{6}\pi$ en $x = \frac{1}{4}\pi$. Dat is korter dan bij de grenzen te noteren $\sin(x) = \frac{1}{2}$ en $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

K

Voorbeeld

Bereken exact.

a $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{9}\pi} \tan(3x)\,\mathrm{d}x$

b $\displaystyle\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \cos^3(x)\,\mathrm{d}x$

Uitwerking

a $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{9}\pi} \tan(3x)\,\mathrm{d}x = \left[-\tfrac{1}{3}\ln|\cos(3x)|\right]_0^{\frac{1}{9}\pi}$

$= -\tfrac{1}{3}\ln\left|\cos\left(\tfrac{1}{3}\pi\right)\right| + \tfrac{1}{3}\ln|\cos(0)|$

$= -\tfrac{1}{3}\ln\left(\tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{1}{3}\ln(1)$

$= -\tfrac{1}{3}\ln(2^{-1}) + 0 = \tfrac{1}{3}\ln(2)$

$$\int_p^q f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{a}F(ax+b)\right]_p^q$$

b $\displaystyle\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \cos^3(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \cos^2(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=\frac{1}{6}\pi}^{x=\frac{1}{4}\pi} (1-\sin^2(x))\,\mathrm{d}\sin(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} (1-u^2)\,\mathrm{d}u$

$= \left[u - \tfrac{1}{3}u^3\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \tfrac{1}{3}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)^3 - \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^3\right)$

$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{8}\cdot 2\sqrt{2} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{8}$

$= \tfrac{5}{12}\sqrt{2} - \tfrac{11}{24}$

8 Bereken exact.

a $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{6}\pi} \tan(2x)\,\mathrm{d}x$

b $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \sin^3(x)\,\mathrm{d}x$

c $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{6}\pi} \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)}\,\mathrm{d}x$

9 Om $\displaystyle\int_0^5 x\sqrt{x+4}\,\mathrm{d}x$ te berekenen met de substitutiemethode stel je $\sqrt{x+4} = u$.

a Licht toe dat bij $x = 0$ hoort $u = 2$ en bereken de waarde van u die bij $x = 5$ hoort.

b Licht toe dat uit $\sqrt{x+4} = u$ volgt $x = u^2 - 4$.

c Bereken exact $\displaystyle\int_0^5 x\sqrt{x+4}\,\mathrm{d}x$.

10 **a** Bereken exact $\displaystyle\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$ met behulp van de substitutie $\sqrt{x+1} = u$.

b Bereken $\displaystyle\int_0^7 \frac{5x}{\sqrt{x+9}}\,\mathrm{d}x$ met behulp van de substitutie $\sqrt{x+9} = u$.

K

A 11 Bereken exact.

a $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln^2(x)}{x}\,\mathrm{d}x$

b $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$

c $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\mathrm{e}^{2x^3}}\,\mathrm{d}x$

A 12 Primitiveer.

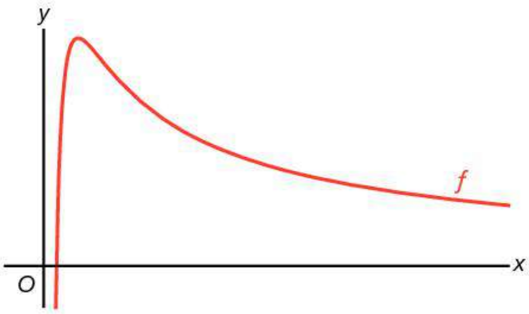
a $f(x) = \cos(x) - \dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$

b $g(x) = \sin^5(x)$

13 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{2 + \ln(x)}{x}$.

a Bereken algebraïsch de oppervlakte van het vlakdeel V dat ingesloten wordt door de grafiek van f, de x-as en de lijn $x = \mathrm{e}$.

b De oppervlakte van het vlakdeel dat ingesloten wordt door de grafiek van f, de x-as en de lijnen $x = 1$ en $x = p$ met $p > 1$ is gelijk aan 6.
Bereken exact de waarde van p.



figuur K.1

A 14 Gegeven zijn de functies $f(x) = \dfrac{4\ln^2(x)}{x}$ en $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

a Los exact op $f(x) \leq g(x)$.

b Bereken algebraïsch de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g.

A 15 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^3 + 4}$.

a Bereken algebraïsch voor welke p de vergelijking $f(x) = p$ precies drie oplossingen heeft.

b De oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijn $x = p$ met $p > 0$ is gelijk aan 2.
Bereken exact de waarde van p.

K

A 16 Er is een model gemaakt van de hoeveelheid water die per tijdseenheid door een doorgebroken dijk van een binnenwater stroomt.

Dit model is $h(t) = \dfrac{a\ \ln(bt + 1)}{bt + 1}$. Hierin is t de tijd in uren en $h(t)$ de hoeveelheid water in m^3 per uur, dit wordt het debiet genoemd.

We bekijken in deze opgave de situatie waarbij h een maximum heeft op $t = 2$ en er in 4 uur tijd in totaal 230 000 m^3 is weggestroomd.

Uit het gegeven dat het maximum optreedt op $t = 2$ volgt dat in twee decimalen nauwkeurig b gelijk is aan 0,86.

a Toon dit aan.

Uit $b = 0{,}86$ en het gegeven dat er in 4 uur tijd in totaal 230 000 m^3 is weggestroomd volgt dat a afgerond op duizendtallen gelijk is aan 178 000.

b Toon dit aan.

c Bereken het maximale debiet in honderden m^3/uur.

d Bereken algebraïsch hoeveel m^3 er het eerste uur na de dijkdoorbraak wegstroomt. Rond af op duizendtallen.

Informatief Debiet van de Rijn

Het debiet is de doorgestroomde hoeveelheid vloeistof per tijdseenheid. Hoe hoger de waterstand, hoe groter het debiet. Het debiet van de Rijn bij Lobith schommelt rond 2200 m^3/s.
In 1995 was er een extreme afvoer van bijna 12 000 m^3/s. Dat is nog niet de maximale afvoer waarop de hoogte van de dijken in Nederland is gebaseerd. Die is namelijk 16 000 m^3/s.
Naar verwachting komt zo'n extreme afvoer eens in de 1250 jaar voor. Dat is het risico dat door de Nederlandse overheid acceptabel wordt gevonden.
Onder normale omstandigheden komt twee derde deel van het water dat bij Lobith ons land binnenstroomt in de Waal terecht en gaat een derde deel via het Pannerdens Kanaal naar de Nederrijn/Lek en de IJssel.
Bij een extreem lage waterstand krijgt de Waal verhoudingsgewijs meer water om deze voor het scheepvaartverkeer belangrijke vaarroute zo lang mogelijk bevaarbaar te houden.

K

Terugblik

De substitutiemethode

Is u een functie van x dan geldt $\int f(u) \cdot u' \,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + c$.

De integraal zonder grenzen die hierin is gebruikt heet een onbepaalde integraal.

Met de substitutiemethode (de omgekeerde kettingregel) kun je primitieven vinden van de functie $f(x) = 4x\sqrt{x^2+1}$ omdat

$\int 4x\,\mathrm{d}x = \int 2\,\mathrm{d}(x^2+1)$.

Het primitiveren gaat als volgt.

$$F(x) = \int 4x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int 2\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}(x^2+1) = \int 2\sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \int 2u^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u$$
$$= 2 \cdot \tfrac{2}{3}u^{1\frac{1}{2}} + c = \tfrac{4}{3}u\sqrt{u} + c = \tfrac{4}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + c$$

Met de substitutiemethode is aangetoond
$f(x) = \tan(x)$ geeft $F(x) = -\ln|\cos(x)| + c$.
Bij het primitiveren van de functie $f(x) = \tan\left(\tfrac{1}{2}x\right)$ gebruik je bovendien de regel
$f(ax+b)$ geeft $\dfrac{1}{a} \cdot F(ax+b) + c$.
Dus $f(x) = \tan\left(\tfrac{1}{2}x\right)$ geeft $F(x) = -2\ln\left|\cos\left(\tfrac{1}{2}x\right)\right| + c$.

Integralen met de substitutiemethode

De integralen $\int_0^1 x^2\ln(x^3+1)\,\mathrm{d}x$ en $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^4(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x$ bereken je algebraïsch met de substitutiemethode.

Bij $\int_0^1 x^2\ln(x^3+1)\,\mathrm{d}x$ krijg je

$$\int_0^1 x^2\ln(x^3+1)\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{x=1} \tfrac{1}{3}\ln(x^3+1)\,\mathrm{d}(x^3+1) = \int_1^2 \tfrac{1}{3}\ln(u)\,\mathrm{d}u =$$

$$\left[\tfrac{1}{3}(u\ln(u) - u)\right]_1^2 = \tfrac{1}{3}(2\ln(2) - 2) - \tfrac{1}{3}(1\cdot\ln(1) - 1) = \tfrac{2}{3}\ln(2) - \tfrac{1}{3}.$$

$x = 0$ en $u = x^3 + 1$
geeft $u = 1$

$x = 1$ en $u = x^3 + 1$
geeft $u = 2$

Bij $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^4(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x$ krijg je

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^4(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{x=\frac{1}{2}\pi} \sin^4(x)\,\mathrm{d}\sin(x) =$$

$$\int_0^1 u^4\,\mathrm{d}u = \left[\tfrac{1}{5}u^5\right]_0^1 = \tfrac{1}{5}\cdot 1 - \tfrac{1}{5}\cdot 0 = \tfrac{1}{5}.$$

$x = 0$ en $u = \sin(x)$
geeft $u = 0$

$x = \tfrac{1}{2}\pi$ en $u = \sin(x)$
geeft $u = 1$

K

K.2 Partieel integreren

O 17 In deze opgave ontdek je wat de primitieve is van
$h(x) = (2x + 3)\cos(x)$.
Bekijk daartoe de functie $k(x) = (2x + 3)\sin(x)$.
Er geldt $k'(x) = 2\sin(x) + (2x + 3)\cos(x)$.

a Licht toe dat de functie k geen primitieve is van de functie h.

Uit $k'(x) = 2\sin(x) + (2x + 3)\cos(x)$ volgt
$(2x + 3)\cos(x) = k'(x) - 2\sin(x)$.

b Licht toe dat geldt
$\int (2x + 3)\cos(x)\,\mathrm{d}x = (2x + 3)\sin(x) - \int 2\sin(x)\,\mathrm{d}x$.

c Primitiveer $h(x) = (2x + 3)\cos(x)$.

Theorie A Primitiveren en de productregel

Uit de productregel voor het differentiëren
$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ volgt

$$\int [f(x) \cdot g(x)]'\mathrm{d}x = \int f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x + \int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$f(x) \cdot g(x) = \int f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x + \int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}g(x) = f(x) \cdot g(x) - \int g(x)\,\mathrm{d}f(x)$$

$\int [f(x) \cdot g(x)]'\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x)$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}g(x) = f(x) \cdot g(x) - \int g(x)\,\mathrm{d}f(x)$$

De regel hierboven pas je toe bij integralen van de vorm
$\int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$.
Je krijgt $\int f \cdot g'\,\mathrm{d}x = \int f\,\mathrm{d}g = f \cdot g - \int g\,\mathrm{d}f = f \cdot g - \int g \cdot f'\,\mathrm{d}x$

Je ziet dat eerst een van de factoren wordt geprimitiveerd.
Hierboven is dat gedaan door $g'\mathrm{d}x$ te vervangen door $\mathrm{d}g$.
Daarom heet deze methode **partieel primitiveren** of **partieel integreren**.

Gebruik je de regel voor het partieel integreren
bij de functie $h(x) = (2x + 3)\cos(x)$ dan krijg je

$$H(x) = \int \underbrace{(2x + 3)}_{f}\,\underbrace{\cos(x)\,\mathrm{d}x}_{g'\mathrm{d}x} = \int \underbrace{(2x + 3)}_{f}\,\underbrace{\mathrm{d}\sin(x)}_{\mathrm{d}g}$$

$$= \underbrace{(2x + 3)}_{f}\,\underbrace{\sin(x)}_{g} - \int \underbrace{\sin(x)}_{g}\,\underbrace{\mathrm{d}(2x + 3)}_{\mathrm{d}f} = \underbrace{(2x + 3)}_{f}\,\underbrace{\sin(x)}_{g} - \int \underbrace{\sin(x)}_{g} \cdot \underbrace{2\,\mathrm{d}x}_{f'\mathrm{d}x}$$

$$= (2x + 3)\sin(x) + 2\cos(x) + c.$$

K

Het primitiveren van $h(x) = (2x + 3)\cos(x)$ lukt met partieel integreren omdat de primitieve van $y = \cos(x)$ niet moeilijker is dan $y = \cos(x)$ zelf terwijl de afgeleide van $y = 2x + 3$ simpeler is dan $y = 2x + 3$.
Bij het partieel integreren krijg je te maken met het product van de primitieve van $y = \cos(x)$ en de afgeleide van $y = 2x + 3$, dus met $y = 2\sin(x)$ en deze functie is eenvoudig te primitiveren.

Werkschema: partieel integreren

1 Noem de functie om eerst te primitiveren g' en de andere functie f.
2 Herleid $\int f \cdot g' \,\mathrm{d}x$ tot $\int f \,\mathrm{d}g$.
3 Gebruik $\int f \,\mathrm{d}g = fg - \int g \,\mathrm{d}f = fg - \int g \cdot f' \,\mathrm{d}x$.
4 Bereken $fg - \int g \cdot f' \,\mathrm{d}x$.

Partieel primitiveren lukt niet altijd.
Tijdens het primitiveren kun je het vermoeden krijgen dat je de verkeerde functie g' hebt genoemd. Begin dan opnieuw met de andere functie.

Voorbeeld

Bereken $\int \frac{\ln(x)}{x\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$.

Uitwerking

$$\int \frac{\ln(x)}{x\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = \int \underbrace{\ln(x)}_{f} \cdot \underbrace{x^{-1\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x}_{g'\mathrm{d}x} = \int \underbrace{\ln(x)}_{f} \cdot \underbrace{\mathrm{d}\,{-2x^{-\frac{1}{2}}}}_{\mathrm{d}g} = \underbrace{\ln(x)}_{f} \cdot \underbrace{-2x^{-\frac{1}{2}}}_{g} - \int \underbrace{-2x^{-\frac{1}{2}}}_{g} \underbrace{\mathrm{d}\ln(x)}_{\mathrm{d}f} =$$

$$-\frac{2\ln(x)}{\sqrt{x}} + \int 2x^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = -\frac{2\ln(x)}{\sqrt{x}} + \int 2x^{-1\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x = -\frac{2\ln(x)}{\sqrt{x}} - 4x^{-\frac{1}{2}} + c = \frac{-2\ln(x) - 4}{\sqrt{x}} + c$$

In het voorbeeld hieronder zie je hoe je een bepaalde integraal noteert die met partieel integreren wordt berekend. Je ziet dat eerst de onbepaalde integraal wordt berekend en dat daarna de grenzen worden ingevuld.

Voorbeeld

Bereken exact $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} x\sin(x) \,\mathrm{d}x$.

Uitwerking

$$\int x\sin(x) \,\mathrm{d}x = \int x \,\mathrm{d}(-\cos(x)) = -x\cos(x) - \int -\cos(x) \,\mathrm{d}x = -x\cos(x) + \sin(x) + c$$

Dus $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} x\sin(x) \,\mathrm{d}x = \left[-x\cos(x) + \sin(x)\right]_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} = -\frac{1}{2}\pi \cdot 0 + 1 - \left(-\frac{1}{6}\pi \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\pi\sqrt{3}$.

K

R 18 Zie het voorbeeld onderaan bladzijde 196.
Onderzoek of het primitiveren van $h(x) = x \sin(x)$ ook lukt als je eerst de factor x primitiveert.

19 Primitiveer.

a $f(x) = x\,\mathrm{e}^{2x}$
b $f(x) = 2x \cos(x)$
c $f(x) = x \ln(x)$
d $f(x) = x^3 \ln(x) + 3$

20 Bereken exact.

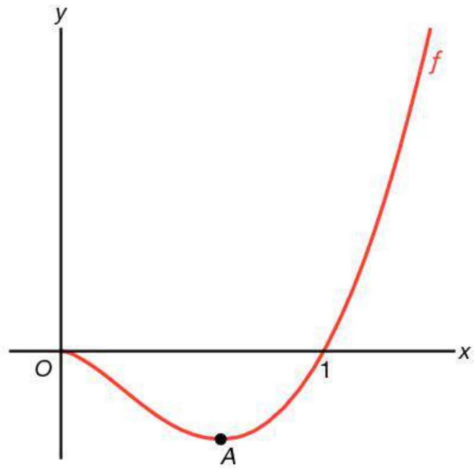
a $\displaystyle\int_0^1 2x\,\mathrm{e}^{x+1}\,\mathrm{d}x$

b $\displaystyle\int_0^{\pi} (3x+1)\sin(x)\,\mathrm{d}x$

21 Bereken met behulp van partieel integreren de primitieven van $f(x) = \ln(x)$.

22 In figuur K.2 is de grafiek van de functie $f(x) = x^2 \ln(x)$ getekend.

a Bereken exact de coördinaten van de top A.
b Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijn $x = \mathrm{e}$.



figuur K.2

A 23 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

a Bereken exact het bereik van f.
b Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijn $x = \mathrm{e}$.

K

O 24 Gegeven is de functie $f(x) = x^2\,e^x$.

a Toon aan dat $\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - \int 2x e^x\,dx$.

b Toon aan dat $\int 2x e^x\,dx = 2x e^x - 2e^x + c$.

c Licht toe dat uit a en b volgt dat de primitieven van f zijn $F(x) = (x^2 - 2x + 2)\,e^x + c$.

Merk op dat de constante c in opgave 24b een andere is dan de constante c in opgave 24c. We gebruiken gemakshalve de letter c voor elke constante.

Theorie B Herhaald partieel integreren

In opgave 24 heb je gezien dat je een primitieve van de functie $f(x) = x^2 e^x$ kunt vinden door twee keer partieel te integreren. Na één keer partieel integreren kreeg je $\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - \int 2x e^x\,dx$ en het berekenen van $\int 2x e^x\,dx$ leverde $\int 2x e^x\,dx = 2x e^x - 2e^x + c$.

Dus $\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c$ en dit geeft de primitieven

$F(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + c$.

Om de functie $g(x) = e^x \sin(x)$ te primitiveren pas je ook twee keer partieel integreren toe.

$$\begin{aligned}
\int e^x \sin(x)\,dx &= \int e^x\,d(-\cos(x)) \\
&= -\cos(x)\cdot e^x - \int -\cos(x)\,de^x \\
&= -e^x\cos(x) + \int e^x\cos(x)\,dx \\
&= -e^x\cos(x) + \int e^x\,d\sin(x) \\
&= -e^x\cos(x) + \sin(x)\cdot e^x - \int \sin(x)\,de^x \\
&= -e^x\cos(x) + e^x\sin(x) - \int e^x\sin(x)\,dx \\
&= e^x\sin(x) - e^x\cos(x) - \int e^x\sin(x)\,dx
\end{aligned}$$

Dus $\int e^x \sin(x)\,dx = e^x\sin(x) - e^x\cos(x) - \int e^x\sin(x)\,dx$.

Hieruit volgt $2\int e^x\sin(x)\,dx = e^x\sin(x) - e^x\cos(x)$

ofwel $\int e^x\sin(x)\,dx = \frac{1}{2}e^x\sin(x) - \frac{1}{2}e^x\cos(x)$.

Dus de primitieven van g zijn $G(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin(x) - \cos(x)) + c$.

Je ziet dat twee keer partieel integreren je niet direct een primitieve oplevert, maar wel een vorm waaruit een primitieve is af te leiden.

K

Voorbeeld

Bereken exact $\int_0^{\pi} x^2 \sin(x)\,\mathrm{d}x$.

Uitwerking

$$\int x^2 \sin(x)\,\mathrm{d}x = \int x^2\,\mathrm{d}(-\cos(x)) = x^2 \cdot -\cos(x) + \int \cos(x)\,\mathrm{d}x^2$$
$$= -x^2\cos(x) + \int 2x\cos(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= -x^2\cos(x) + \int 2x\,\mathrm{d}\sin(x)$$
$$= -x^2\cos(x) + 2x\cdot\sin(x) - \int \sin(x)\,\mathrm{d}\,2x$$
$$= -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) - \int 2\sin(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) + c$$

$\int 2x\cos(x)\,\mathrm{d}x$ is eenvoudiger dan $\int x^2\sin(x)\,\mathrm{d}x$, dus doorgaan met partieel integreren.

$$\int_0^{\pi} x^2\sin(x)\,\mathrm{d}x = \left[-x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x)\right]_0^{\pi}$$
$$= -\pi^2\cdot -1 + 2\pi\cdot 0 + 2\cdot -1 - (0+0+2) = \pi^2 - 4$$

R 25 Primitiveer $g(x) = \mathrm{e}^x \sin(x)$ door eerst e^x te primitiveren.

26 Primitiveer.

a $f(x) = \frac{1}{4}x^2\cos(x)$

b $g(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos(x)$

c $h(x) = \mathrm{e}^{2x}\sin(x)$

d $k(x) = \ln^2(x)$

27 Bereken exact.

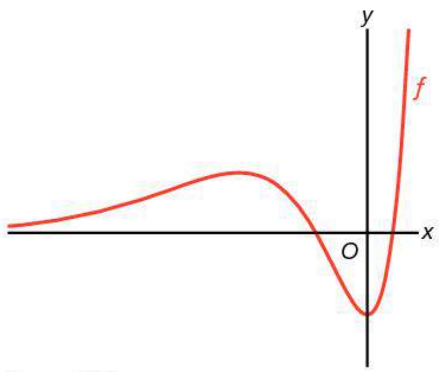
a $\int_1^3 (x^2 - x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

b $\int_1^{\mathrm{e}} x\ln^2(x)\,\mathrm{d}x$

28 Gegeven is de functie $f(x) = (2x^2 + x - 1)\mathrm{e}^x$. Zie figuur K.3.

a Bereken exact de extreme waarden van f.

b Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as.



figuur K.3

A 29 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}}$.

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijn $x = \mathrm{e}$.

Bereken exact

a de oppervlakte van V

b de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V om de x-as wentelt.

K

Terugblik

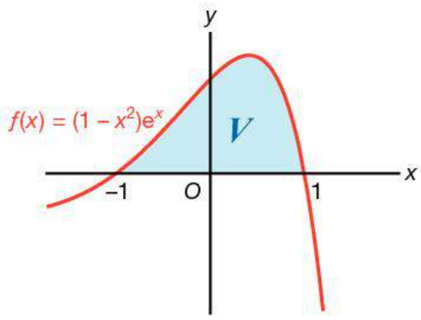
Partieel integreren

Partieel integreren (de omgekeerde productregel) kun je gebruiken om een primitieve te zoeken van de functie $f(x) \cdot g'(x)$. Je herleidt $\int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$ tot $\int f(x)\,\mathrm{d}g(x)$ en gebruikt de productregel in de vorm $\int f\,\mathrm{d}g = fg - \int g\,\mathrm{d}f$. Daarna herleid je $fg - \int g\,\mathrm{d}f$ tot de vorm $fg - \int g \cdot f'\,\mathrm{d}x$.

Bij het primitiveren van $h(x) = 4x\,\mathrm{e}^{3x}$ krijg je $H(x) = \int 4x\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4}{3}x\,\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{3x} =$
$\frac{4}{3}x \cdot \mathrm{e}^{3x} - \int \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}\,\frac{4}{3}x = \frac{4}{3}x\,\mathrm{e}^{3x} - \int \frac{4}{3}\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}x\,\mathrm{e}^{3x} - \frac{4}{9}\mathrm{e}^{3x} + c = \frac{4}{9}\mathrm{e}^{3x}(3x-1) + c.$

Herhaald partieel integreren

Om de oppervlakte van het vlakdeel V in de figuur hiernaast algebraïsch te berekenen, pas je twee keer partieel integreren toe.



$$\int (1-x^2)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int (1-x^2)\,\mathrm{d}\mathrm{e}^x = (1-x^2)\cdot\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}(1-x^2) =$$
$$(1-x^2)\,\mathrm{e}^x + \int 2x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (1-x^2)\,\mathrm{e}^x + \int 2x\,\mathrm{d}\,\mathrm{e}^x =$$
$$(1-x^2)\,\mathrm{e}^x + 2x\cdot\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}\,2x = (1+2x-x^2)\,\mathrm{e}^x - \int 2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x =$$
$$(1+2x-x^2)\mathrm{e}^x - 2\,\mathrm{e}^x + c = (-x^2+2x-1)\,\mathrm{e}^x + c$$
$$O(V) = \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[(-x^2+2x-1)\,\mathrm{e}^x\right]_{-1}^{1} = 0 - -4\mathrm{e}^{-1} = \frac{4}{\mathrm{e}}$$

Ook de primitieven van $f(x) = \mathrm{e}^x\cos(2x)$ bereken je met herhaald partieel integreren.

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{e}^x\cos(2x)\,\mathrm{d}x &= \int \cos(2x)\,\mathrm{d}\,\mathrm{e}^x \\
&= \cos(2x)\cdot\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}\cos(2x) \\
&= \mathrm{e}^x\cos(2x) - \int \mathrm{e}^x\cdot -2\sin(2x)\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e}^x\cos(2x) + \int 2\,\mathrm{e}^x\sin(2x)\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e}^x\cos(2x) + \int 2\sin(2x)\,\mathrm{d}\,\mathrm{e}^x \\
&= \mathrm{e}^x\cos(2x) + 2\sin(2x)\cdot\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}\,2\sin(2x) \\
&= \mathrm{e}^x\cos(2x) + 2\,\mathrm{e}^x\sin(2x) - \int \mathrm{e}^x\cdot 4\cos(2x)\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e}^x\cos(2x) + 2\,\mathrm{e}^x\sin(2x) - 4\int \mathrm{e}^x\cos(2x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Uit $\int \mathrm{e}^x\cos(2x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\cos(2x) + 2\,\mathrm{e}^x\sin(2x) - 4\int \mathrm{e}^x\cos(2x)\,\mathrm{d}x$
volgt $5\int \mathrm{e}^x\cos(2x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\cos(2x) + 2\,\mathrm{e}^x\sin(2x)$.
Dus $F(x) = \frac{1}{5}\,\mathrm{e}^x\cos(2x) + \frac{2}{5}\,\mathrm{e}^x\sin(2x) + c = \frac{1}{5}\,\mathrm{e}^x(\cos(2x) + 2\sin(2x)) + c$.

K.3 Cyclometrische functies

O 30 In deze opgave ga je $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$ exact berekenen.

Stel $x = \tan(t)$ met $-\frac{1}{2}\pi < t < \frac{1}{2}\pi$.
Vul in.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int_{t=...}^{t=...} \frac{1}{\tan^2(t)+1}\,d\tan(t) =$$

$$\int_{...}^{...} \frac{1}{\tan^2(t)+1}\cdot(\tan^2(t)+1)\,dt = \int_{...}^{...} 1\,dt = [\,...\,]_{...}^{...} = ...$$

Theorie A De functie $f(x) = \arctan(x)$

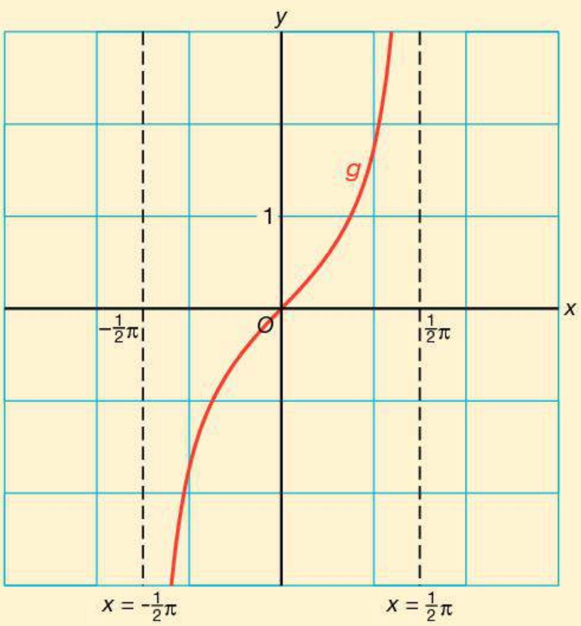
In figuur K.4 is de grafiek van de functie $g(x) = \tan(x)$ met $D_g = \left\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \right\rangle$ getekend.

Omdat op het interval $\left\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \right\rangle$ elke functiewaarde maar één keer voorkomt heeft de functie $g(x) = \tan(x)$ met $D_g = \left\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \right\rangle$ een inverse functie g^{inv}.

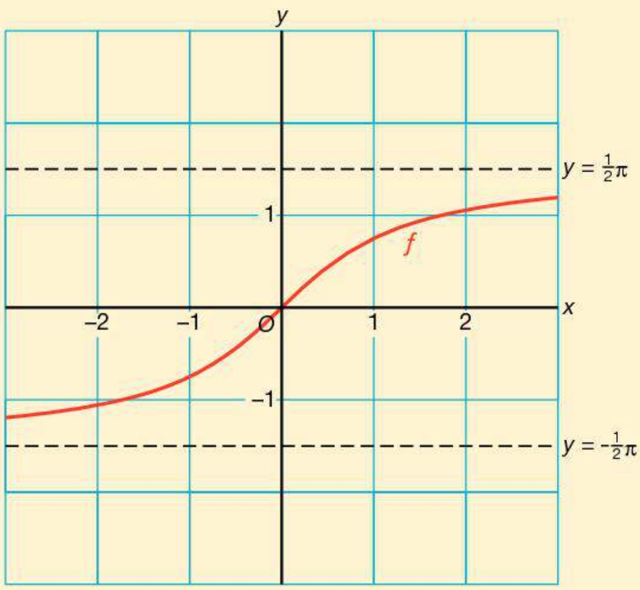
Deze inverse functie noteren we als $f(x) = g^{\text{inv}}(x) = \arctan(x)$.
Spreek uit arktangens x.

De functie $f(x) = \arctan(x)$ is een **cyclometrische functie**.
De grafiek van f is in figuur K.5 getekend.

Je hebt met een functie te maken als bij elke x uit het domein van de functie precies één functiewaarde hoort.



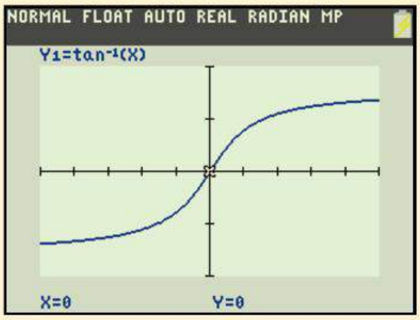
figuur K.4 De functie $g(x) = \tan(x)$ met $D_g = \left\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \right\rangle$ heeft een inverse.



figuur K.5 De functie $f(x) = \arctan(x)$ heeft $D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = \left\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \right\rangle$.

K

Je kunt de grafiek van f plotten door in te voeren $y_1 = \tan^{-1}(x)$. In figuur K.6 is Xmin = −5, Xmax = 5, Ymin = −2 en Ymax = 2 gekozen.



figuur K.6

De functie $f(x) = \arctan(x)$ is de inverse functie van de functie $g(x) = \tan(x)$ met $D_g = \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$.

Er geldt $D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$.

De **arctangensfunctie** gebruiken we om de functie $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ te primitiveren.

Substitutie van $x = \tan(t)$ in $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ geeft $\displaystyle\int \frac{1}{\tan^2(t)+1}\,\mathrm{d}\tan(t)$.

Omdat $\dfrac{\mathrm{d}\tan(t)}{\mathrm{d}t} = \tan^2(t) + 1$ vervangen we d tan(t) door $(\tan^2(t) + 1)\,\mathrm{d}t$.

Je krijgt $\displaystyle\int \frac{1}{\tan^2(t)+1}\,\mathrm{d}\tan(t) = \int \frac{\tan^2(t)+1}{\tan^2(t)+1}\,\mathrm{d}t = \int 1\,\mathrm{d}t = t + c$.

Uit $x = \tan(t)$ volgt $t = \arctan(x)$ en dus $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \arctan(x) + c$.

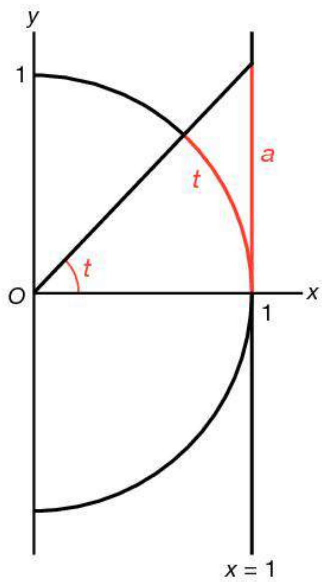
$f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ geeft $F(x) = \arctan(x) + c$

$g(x) = \arctan(x)$ geeft $g'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

Informatief Arcus en cyclometrisch

Arc in de cyclometrische functie arctangens komt van het Latijnse woord arcus, dat boog betekent.
Het gebruik van het begrip boog is als volgt te verklaren.
Op de eenheidscirkel hoort bij een hoek van t radialen een boog met lengte t.
Is $-\frac{1}{2}\pi < t < \frac{1}{2}\pi$ en stel je $\tan(t) = a$, dan is t de boog (arcus) waarvan de tangens a is, dus $t = \arctan(a)$.

Het woord cyclometrisch komt van het Griekse woord kuklos, dat cirkel betekent, en metrein, dat meten betekent.



Voorbeeld

a Bereken exact $\arctan\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$.

b Los algebraïsch op $\arctan(x) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Rond het antwoord af op drie decimalen.

c Differentieer $f(x) = \arctan(x^2 + 1)$.

d Bereken exact $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}\sqrt{3}} \frac{1}{16x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

Uitwerking

a $\arctan\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{6}\pi$ $\quad\tan\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ en $-\frac{1}{2}\pi < \frac{1}{6}\pi < \frac{1}{2}\pi$

b $\arctan(x) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$x = \tan\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) \leftarrow$ $\boxed{t = \arctan(x) \text{ dus } x = \tan(t)}$

$x \approx 0{,}651$

c $f'(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^2+1} \cdot 2x = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2+1} = \dfrac{2x}{x^4+2x^2+2}$

d $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}\sqrt{3}} \frac{1}{16x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{x=\frac{1}{4}\sqrt{3}} \frac{1}{(4x)^2+1} \cdot \frac{1}{4}\,\mathrm{d}\,4x = \left[\frac{1}{4}\arctan(4x)\right]_0^{\frac{1}{4}\sqrt{3}}$

$= \frac{1}{4}\arctan\left(\sqrt{3}\right) - \frac{1}{4}\arctan(0) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\pi - 0 = \frac{1}{12}\pi$

R 31 **a** Waarom is $\arctan\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$ niet gelijk aan $1\frac{1}{6}\pi$, terwijl $\tan\left(1\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$?

b Waarom is $x = \tan\left(\sqrt{3}\right)$ geen oplossing van de vergelijking $\arctan(x) = \sqrt{3}$?

32 Vul de tabel in en leer hem uit het hoofd.

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan(x)$					$\frac{1}{6}\pi$		

33 Los algebraïsch op. Rond het antwoord zo nodig af op drie decimalen.

a $\arctan(x) = \frac{1}{3}\pi$

b $\arctan(x-2) = -\frac{1}{4}\pi$

c $\arctan(x^2-1) = \frac{1}{4}\pi$

d $\arctan(x) = \frac{2}{3}\pi$

e $\arctan(x) = \sqrt{2}$

f $\arctan(x^2-1) = 1$

34 Differentieer.

a $f(x) = 2\arctan\left(\frac{1}{2}x\right)$

b $g(x) = \arctan(x-2)$

c $h(x) = \arctan(x^2)$

K

35 Bereken exact.

a $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}\,dx$

b $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx$

c $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{3}\sqrt{3}} \frac{3}{9x^2+1}\,dx$

O 36 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{10}{x^2+4}$.

Om de primitieven van f te berekenen schrijf je f in de vorm

$f(x) = \dfrac{a}{(bx)^2+1}$.

a Bereken a en b.

b Primitiveer f.

Theorie B De arctangensfunctie en primitiveren

Om de functie $f(x) = \dfrac{24}{9x^2+4}$ te primitiveren gebruik je

$\displaystyle\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \arctan(u) + c$.

$$F(x) = \int \frac{24}{9x^2+4}\,dx = \int \frac{6}{\frac{9}{4}x^2+1}\,dx = \int 6 \cdot \frac{1}{\left(\frac{3}{2}x\right)^2+1}\,dx$$

$$= 6 \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \arctan\left(\tfrac{3}{2}x\right) + c = 4\arctan\left(1\tfrac{1}{2}x\right) + c$$

Voorbeeld

Bereken exact $\displaystyle\int_0^2 \frac{6}{x^2-4x+8}\,dx$.

Aanpak

Gebruik kwadraatafsplitsen om $x^2 - 4x + 8$ te schrijven als $(x-2)^2 + 4$.

Uitwerking

$$\int_0^2 \frac{6}{x^2-4x+8}\,dx = \int_0^2 \frac{6}{(x-2)^2-4+8}\,dx = \int_0^2 \frac{6}{(x-2)^2+4}\,dx =$$

$$\int_0^2 \frac{1\frac{1}{2}}{\frac{(x-2)^2}{4}+1}\,dx = \int_0^2 \frac{1\frac{1}{2}}{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2+1}\,dx = \int_0^2 \frac{1\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2+1}\,dx =$$

$$\left[1\tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \arctan\left(\tfrac{1}{2}x-1\right)\right]_0^2 = \left[3\arctan\left(\tfrac{1}{2}x-1\right)\right]_0^2 =$$

$$3\arctan(0) - 3\arctan(-1) = 3 \cdot 0 - 3 \cdot -\tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{3}{4}\pi$$

K

37 Primitiveer.

a $f(x) = \dfrac{12}{16x^2 + 1}$

b $g(x) = \dfrac{4}{x^2 + 4}$

c $h(x) = \dfrac{5}{x^2 + 6x + 10}$

d $j(x) = \dfrac{3}{x^2 + 4x + 13}$

38 Bereken exact.

a $\displaystyle\int_0^1 \frac{3}{x^2 + 3}\,\mathrm{d}x$

b $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{x^4 + 1}\,\mathrm{d}x$

c $\displaystyle\int_3^6 \frac{5}{x^2 - 6x + 18}\,\mathrm{d}x$

d $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\arctan(x)}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x$

A 39 Bereken exact.

a $\displaystyle\int_0^{1\frac{1}{2}} \frac{2}{4x^2 + 9}\,\mathrm{d}x$

b $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\ln(3)} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} + 1}\,\mathrm{d}x$

c $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4x^2 - 4x + 2}\,\mathrm{d}x$

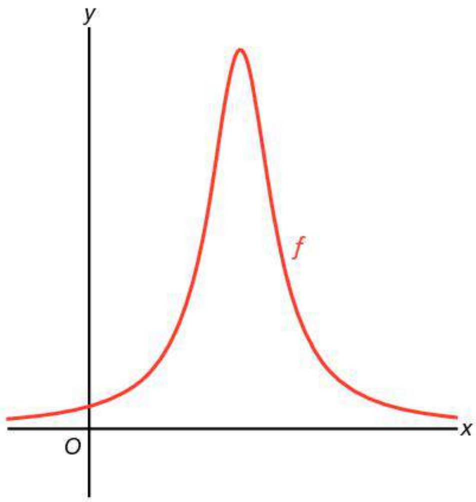
d $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x) + 1}\,\mathrm{d}x$

A 40 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{10}{x^2 - 8x + 17}$.

a Bereken exact het bereik van f.

b Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat ingesloten wordt door de grafiek van f, de x-as en de lijnen $x = 4$ en $x = 5$.

c Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijnen $x = 4$ en $x = p$ met $p > 4$ zo, dat $O(W) = 10$. Bereken p algebraïsch. Rond het antwoord af op drie decimalen.



figuur K.7

O 41 In deze opgave ga je $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x$ exact berekenen.

Stel $x = \sin(t)$ met $-\frac{1}{2}\pi < t < \frac{1}{2}\pi$.
Vul in.

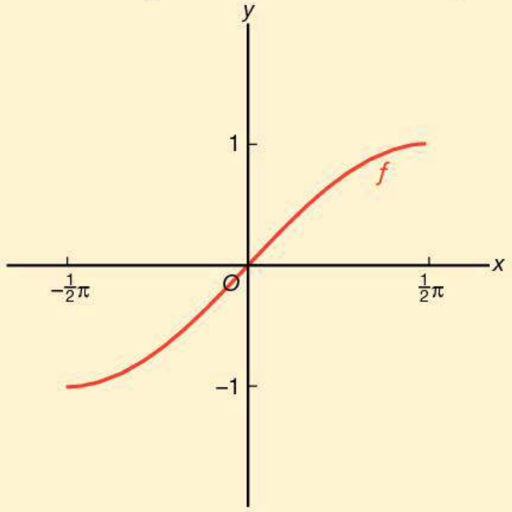
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{t=\dots}^{t=\dots} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(t)}}\,\mathrm{d}\sin(t) = \int_{\dots}^{\dots} \frac{1}{\sqrt{\cos^2(t)}} \cdot \cos(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$\int_{\dots}^{\dots} \frac{1}{\cos(t)} \cdot \cos(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\dots}^{\dots} 1\,\mathrm{d}t = [\dots]_{\dots}^{\dots} = \dots$$

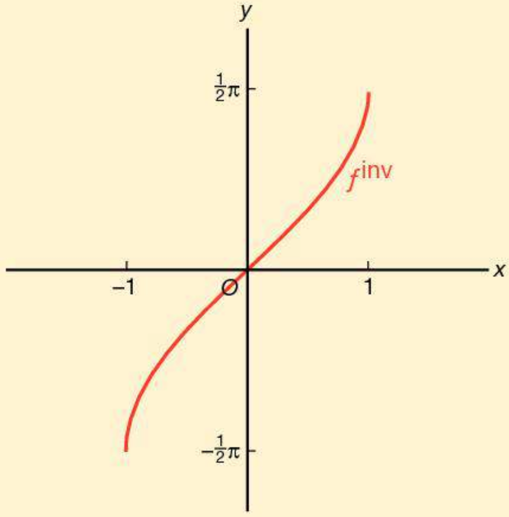
K

Theorie C De functie $y = \arcsin(x)$

De functie $f(x) = \sin(x)$ met domein $\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$ heeft een inverse.
Dit is de cyclometrische functie $y = \arcsin(x)$.



figuur K.8 $f(x) = \sin(x)$ met domein $\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$.



figuur K.9 $f^{\text{inv}}(x) = \arcsin(x)$ heeft domein $[-1, 1]$ en bereik $\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$.

De functie $f(x) = \arcsin(x)$ is de inverse van de functie $y = \sin(x)$ met domein $\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$.
Er geldt $D_f = [-1, 1]$ en $B_f = \left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$.

We gebruiken een arcsinus om de functie $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ te primitiveren.

Substitutie van $x = \sin(t)$ in $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ geeft $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}\,\mathrm{d}\sin(t) =$

$$\int \frac{1}{\sqrt{\cos^2(t)}} \cdot \cos(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{|\cos(t)|} \cdot \cos(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{\cos(t)}{|\cos(t)|}\,\mathrm{d}t.$$

Neem je $-\frac{1}{2}\pi < t < \frac{1}{2}\pi$, dan is $\cos(t) > 0$ en dus is $|\cos(t)| = \cos(t)$.

Zo krijg je $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}t = t + c.$

Omdat $x = \sin(t)$ en $-\frac{1}{2}\pi < t < \frac{1}{2}\pi$ is $t = \arcsin(x)$ en dus

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(x) + c.$$

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ geeft $F(x) = \arcsin(x) + c$
$g(x) = \arcsin(x)$ geeft $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

K

Voorbeeld

Bereken exact $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$.

Uitwerking

$$\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}}\,dx = \int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}x\right)^2}}\,dx = \left[\tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot \arcsin\left(\tfrac{1}{2}x\right)\right]_{1}^{\sqrt{3}} =$$

$$\arcsin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \arcsin\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{3}\pi - \tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{1}{6}\pi$$

42 Vul de tabel in.

x	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\arcsin(x)$									

43 Los algebraïsch op. Rond het antwoord zo nodig af op drie decimalen.

a $\arcsin(x) = \frac{1}{2}\pi$

b $\arcsin(x) = -\frac{1}{6}\pi$

c $\arcsin(x) = 2$

d $3\arcsin(x - \sqrt{3}) = \pi$

44 Bereken exact.

a $\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{6}\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$

b $\int_{-1\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{1\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

c $\int_{0}^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

d $\int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{4-x^4}}\,dx$

45 Bereken met behulp van partieel integreren de primitieven.

a $f(x) = \arctan(x)$

b $g(x) = \arcsin(x)$

A 46 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x}{\sqrt{25-x^4}}$.

a Bereken exact het domein van f en schets de grafiek van f.

b Stel langs algebraïsche weg de formule op van de lijn k die de grafiek van f raakt in het punt A met $x_A = \sqrt{3}$.

c Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijn $x = \frac{1}{2}\sqrt{10}$.

A 47 Primitiveer.

a $f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

b $g(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}$

K

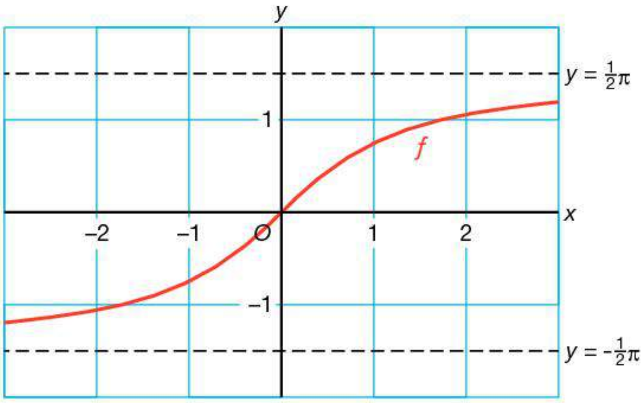
Terugblik

Cyclometrische functies

De functies $f(x) = \arctan(x)$ en $g(x) = \arcsin(x)$ zijn cyclometrische functies.
Het zijn de inverse functies van

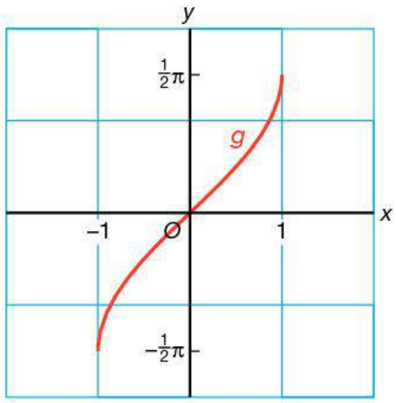
- $y = \tan(x)$ met domein $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$
- $y = \sin(x)$ met domein $\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$.

In de figuren hieronder zie je de grafieken van f en g.



$f(x) = \arctan(x)$

$D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$



$g(x) = \arcsin(x)$

$D_g = [-1, 1]$ en $B_g = \left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$

Cyclometrische functies en primitieven

De primitieven van $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ zijn $F(x) = \arctan(x) + c$

en van $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ zijn de primitieven $G(x) = \arcsin(x) + c$.

Bij het primitiveren van $f(x) = \dfrac{10}{x^2 + 4}$ krijg je

$$F(x) = \int \frac{10}{x^2 + 4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}x^2 + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}x = 5\arctan\left(\tfrac{1}{2}x\right) + c.$$

Bij het primitiveren van $g(x) = \dfrac{10}{x^2 + 8x + 17}$ krijg je

$$G(x) = \int \frac{10}{x^2 + 8x + 17}\,\mathrm{d}x = \int \frac{10}{(x + 4)^2 + 1}\,\mathrm{d}x = 10\arctan(x + 4) + c.$$

Bij het primitiveren van $h(x) = \dfrac{10}{\sqrt{25 - x^2}}$ krijg je

$$H(x) = \int \frac{10}{\sqrt{25 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{10}{5\sqrt{1 - \frac{1}{25}x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}x\right)^2}}\,\mathrm{d}x = 10\arcsin\left(\tfrac{1}{5}x\right) + c.$$

Bij het primitiveren van cyclometrische functies ga je partieel integreren. Hierbij gebruik je dan de afgeleide van de cyclometrische functie.

K

K.4 Breuksplitsen

O 48 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ en $h(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + 1}$.

a Bereken van f en van g de primitieve met integratieconstante 0.

b Licht toe dat $h(x) = f(x) + g(x)$ en geef de primitieven van h.

O 49 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2x + 5}{x + 1}$.

a De functie is te schrijven als $f(x) = \frac{2x}{x + 1} + \frac{5}{x + 1}$.
Licht toe dat deze splitsing correct is, maar dat f hiermee niet te primitiveren is.

b De functie is ook te schrijven als $f(x) = 2 + \frac{3}{x + 1}$.
Licht toe dat deze splitsing correct is en dat f hiermee wel te primitiveren is.

Theorie A Staartdelingen

In opgave 48 heb je gezien dat $\frac{2x + 1}{x^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1}$.
Door de breuk $\frac{2x + 1}{x^2 + 1}$ op te splitsen in twee delen die elk afzonderlijk eenvoudig te primitiveren zijn, heb je de primitieven gevonden van $h(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + 1}$.
Deze methode wordt **breuksplitsen** genoemd.

In opgave 49 heb je te maken met een gebroken functie waarvan de noemer een lineaire functie is. Om dit soort functies te kunnen primitiveren, splits je de breuk met een **staartdeling**.
Bij de functie $f(x) = \frac{2x + 5}{x + 1}$ gaat dit als volgt.

$x + 1 \,/\, 2x + 5 \,\backslash\, 2 \leftarrow \boxed{\frac{2x}{x} = 2}$
$\boxed{2(x + 1)} \rightarrow 2x + 2 \;-$
3

Dus $f(x) = 2 + \frac{3}{x + 1}$.
De primitieven van f zijn $F(x) = 2x + 3 \ln|x + 1| + c$.

216/52925\245 rest 5
$\boxed{2 \times 216} \rightarrow$ 432 –
972
864 –
1085
1080 –
5
$\boxed{529 : 216 \text{ gaat 2 keer}}$

Dus $\frac{52\,925}{216} = 245 + \frac{5}{216}$.

K

Om de primitieven van de functie $g(x) = \dfrac{2x^2 + 5x + 1}{x + 1}$ te berekenen gebruik je ook een staartdeling.

$\boxed{2x(x+1)}$

$$\begin{array}{l} x + 1 \,/\, 2x^2 + 5x + 1 \,\backslash\, 2x + 3 \\ \quad\quad\;\; \underline{2x^2 + 2x} \; - \\ \quad\quad\quad\quad\;\; 3x + 1 \\ \quad\quad\quad\quad\;\; \underline{3x + 3} \; - \\ \quad\quad\quad\quad\quad\;\; -2 \end{array}$$

$\boxed{\dfrac{2x^2}{x} = 2x}$

Dus $g(x) = 2x + 3 - \dfrac{2}{x + 1}$ en dit geeft $G(x) = x^2 + 3x - 2\ln|x + 1| + c$.

Een **polynoom** of **veelterm** is een functie van de vorm
$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ met $a_n \neq 0$.

De **graad van de polynoom** is n. De getallen $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1$ en a_0 heten de **coëfficiënten van de polynoom**.

Elke functie van de vorm $f(x) = \dfrac{p(x)}{ax + b}$ met p een polynoom en $a \neq 0$ is met behulp van een staartdeling te schrijven in de vorm $f(x) = q(x) + \dfrac{k}{ax + b}$ met q een polynoom en k een constante. Nadat de functie tot deze vorm is herleid, vind je eenvoudig de primitieven.

De primitieven zijn $F(x) = Q(x) + \dfrac{k}{a} \ln|ax + b| + c$.

De functie $p(x) = 2x^4 - 7x^3 + 4x + 11$ is een polynoom van graad 4 en de coëfficiënt van x^3 is -7.

Informatief Uitdelen in plaats van staartdelen

De breuk $\dfrac{2x + 5}{x + 1}$ is ook te splitsen met behulp van uitdelen.

Zorg ervoor dat in de teller de vorm $A(x + 1) + B$ komt.

Je ziet dat $A = 2$ en je krijgt $2(x + 1) + B = 2x + 2 + B$, dus $2 + B = 5$ en dit geeft $B = 3$.

Dus $\dfrac{2x + 5}{x + 1} = \dfrac{2(x + 1) + 3}{x + 1} = 2 + \dfrac{3}{x + 1}$.

Bij $\dfrac{2x^2 + 5x + 1}{x + 1}$ zorg je in de teller voor de vorm $Ax(x + 1) + B(x + 1) + C$.

Je ziet dat $A = 2$ en je krijgt
$2x(x + 1) + B(x + 1) + C = 2x^2 + 2x + Bx + B + C = 2x^2 + (2 + B)x + B + C$.

Dit geeft $2 + B = 5$, dus $B = 3$. Dus $3 + C = 1$ en dit geeft $C = -2$.

Dus $\dfrac{2x^2 + 5x + 1}{x + 1} = \dfrac{2x(x + 1) + 3(x + 1) - 2}{x + 1} = 2x + 3 - \dfrac{2}{x + 1}$.

K

Voorbeeld

Bereken exact $\displaystyle\int_1^4 \frac{x^2 + 8x}{2x - 1}\,\mathrm{d}x$.

Uitwerking

$2x - 1 \,/\, x^2 + 8x \,\backslash\, \tfrac{1}{2}x + 4\tfrac{1}{4}$

$$\begin{array}{l} \quad x^2 - \tfrac{1}{2}x \\ \hline \quad 8\tfrac{1}{2}x \\ \qquad 8\tfrac{1}{2}x - 4\tfrac{1}{4} \\ \hline \qquad\qquad 4\tfrac{1}{4} \end{array}$$

Dus $\dfrac{x^2 + 8x}{2x - 1} = \tfrac{1}{2}x + 4\tfrac{1}{4} + \dfrac{4\tfrac{1}{4}}{2x - 1}$.

$$\int_1^4 \frac{x^2 + 8x}{2x - 1}\,\mathrm{d}x = \int_1^4 \left(\tfrac{1}{2}x + 4\tfrac{1}{4} + \frac{4\tfrac{1}{4}}{2x - 1}\right)\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{4}x^2 + 4\tfrac{1}{4}x + 2\tfrac{1}{8}\ln|2x - 1|\right]_1^4 =$$

$$4 + 17 + 2\tfrac{1}{8}\ln(7) - \left(\tfrac{1}{4} + 4\tfrac{1}{4} + 2\tfrac{1}{8}\ln(1)\right) = 16\tfrac{1}{2} + 2\tfrac{1}{8}\ln(7)$$

50 Primitiveer.

a $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x + 1}$

b $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

c $f(x) = \dfrac{x + 1}{2x + 1}$

d $f(x) = \dfrac{2 - x}{x + 1}$

e $f(x) = \dfrac{3 - 4x}{2x + 1}$

f $f(x) = \dfrac{6x - 1}{1 - 2x}$

51 Bereken exact.

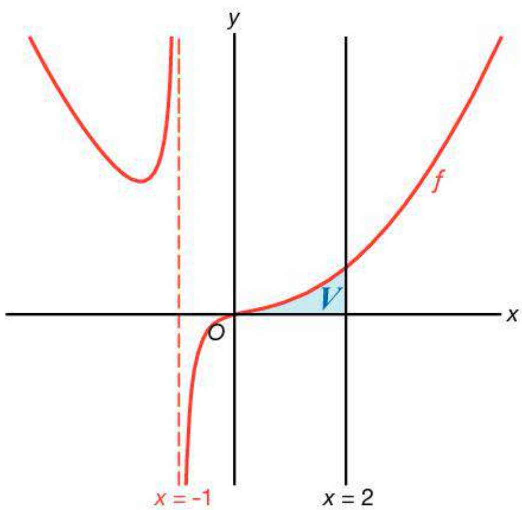
a $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}\,\mathrm{d}x$

b $\displaystyle\int_{-4}^{-2} \frac{-2x^2 - x}{x + 1}\,\mathrm{d}x$

A 52 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^3 + x}{x + 1}$.

a Stel langs algebraïsche weg de formule op van de lijn k die de grafiek van f raakt in het punt A met $x_A = 1$.

b Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijn $x = 2$.



figuur K.10

K

O 53 Gegeven zijn de functies $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+4x+5}$, $g(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+4x+4}$ en $h(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+4x+3}$.

a Schets de drie grafieken in aparte figuren en verklaar het opmerkelijke verschil tussen de drie grafieken.

b Licht toe dat $f(x)$ te schrijven is als $f(x) = \dfrac{2x+4}{x^2+4x+5} - \dfrac{5}{x^2+4x+5}$, $g(x)$ als $g(x) = \dfrac{2}{x+2} - \dfrac{5}{(x+2)^2}$ en $h(x)$ als $h(x) = -\dfrac{1\frac{1}{2}}{x+1} + \dfrac{3\frac{1}{2}}{x+3}$.

Theorie B Primitieven van $f(x) = \dfrac{p(x)}{x^2+bx+c}$

Elke functie f van de vorm ‘een polynoom gedeeld door een tweedegraadsfunctie’ is te herleiden tot de vorm $f(x) = \dfrac{p(x)}{x^2+bx+c}$ door teller en noemer te delen door de coëfficiënt van x^2 uit de noemer.

Met behulp van breuksplitsen is f te schrijven in de vorm

$f(x) = q(x) + \dfrac{l(x)}{x^2+bx+c}$ met q een polynoom en l een lineaire functie.

Om f te primitiveren moeten we dus onderzoeken hoe functies van de vorm $g(x) = \dfrac{l(x)}{x^2+bx+c}$ zijn te primitiveren. Hierbij is de discriminant $D = b^2 - 4c$ van de noemer van belang.

We onderscheiden drie situaties: $D < 0$, $D = 0$ en $D > 0$.

$$\frac{x^3-2x}{2x^2+3x+4} = \frac{\frac{1}{2}x^3 - x}{x^2+1\frac{1}{2}x+2}$$

De noemer is van de vorm $x^2 + bx + c$.

I $\dfrac{l(x)}{x^2+bx+c}$ **met** $b^2 - 4c < 0$

De noemer is te schrijven in de vorm $(x-p)^2 + q$ met $q > 0$.

Bij $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+4x+5}$ krijg je

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2+4x+5} = \frac{2x+4-5}{x^2+4x+5} = \frac{2x+4}{x^2+4x+5} - \frac{5}{x^2+4x+5}.$$

$2x + 4$ is de afgeleide van $x^2 + 4x + 5$.

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{1}{x^2+4x+5}\,d(x^2+4x+5) = \ln|x^2+4x+5| + c_1$$

$$\int \frac{5}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{5}{(x+2)^2+1}\,dx = 5\arctan(x+2) + c_2$$

Dus $F(x) = \ln|x^2+4x+5| - 5\arctan(x+2) + c$.

K

II $\dfrac{l(x)}{x^2 + bx + c}$ **met** $b^2 - 4c = 0$

De noemer is te schrijven in de vorm $(x - p)^2$.

Bij $g(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 + 4x + 4}$ krijg je

$$g(x) = \frac{2x-1}{x^2+4x+4} = \frac{2x-1}{(x+2)^2} = \frac{2(x+2)-5}{(x+2)^2} = \frac{2}{x+2} - \frac{5}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{2}{x+2} - 5(x+2)^{-2} \text{ en dit geeft}$$

$$G(x) = 2\ln|x+2| + 5(x+2)^{-1} + c = 2\ln|x+2| + \frac{5}{x+2} + c.$$

III $\dfrac{l(x)}{x^2 + bx + c}$ **met** $b^2 - 4c > 0$

De noemer is te ontbinden.

Bij $h(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 + 4x + 3}$ krijg je

$$h(x) = \frac{2x-1}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x+1)}{(x+1)(x+3)}$$

$$= \frac{Ax + 3A + Bx + B}{(x+1)(x+3)} = \frac{(A+B)x + 3A + B}{(x+1)(x+3)}.$$

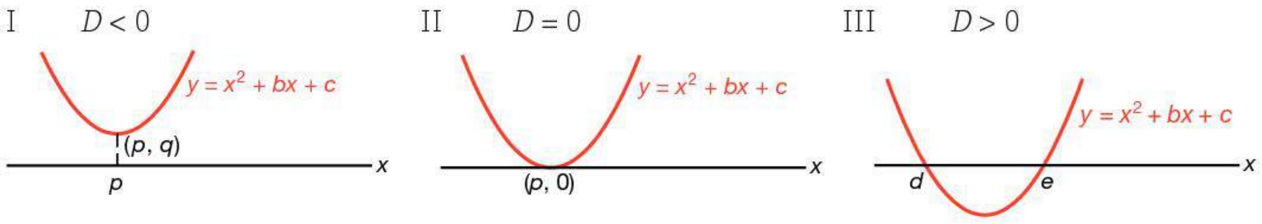
Zo krijg je $\begin{cases} A + B = 2 \\ 3A + B = -1 \end{cases}$

Oplossen van het stelsel geeft $A = -1\frac{1}{2}$ en $B = 3\frac{1}{2}$.

Dus $h(x) = \dfrac{-1\frac{1}{2}}{x+1} + \dfrac{3\frac{1}{2}}{x+3}$ en dit geeft

$$H(x) = -1\tfrac{1}{2}\ln|x+1| + 3\tfrac{1}{2}\ln|x+3| + c.$$

Informatief De discriminant van $x^2 + bx + c = 0$



$y = (x - p)^2 + q$ met $q > 0$ $\quad$ $y = (x - p)^2$ $\quad$ $y = (x - d)(x - e)$

K

Voorbeeld

Bereken exact $\displaystyle\int_4^5 \frac{x^2-3x+5}{x^2-4x+4}\,\mathrm{d}x$.

Uitwerking

$x^2-4x+4\,/\,x^2-3x+5\,\backslash\,1$

$\underline{x^2-4x+4}\,-$

$x+1$

Dus $\dfrac{x^2-3x+5}{x^2-4x+4}=1+\dfrac{x+1}{x^2-4x+4}=1+\dfrac{x-2+3}{(x-2)^2}=1+\dfrac{x-2}{(x-2)^2}+\dfrac{3}{(x-2)^2}$

$=1+\dfrac{1}{x-2}+3(x-2)^{-2}.$

$$\int_4^5 \frac{x^2-3x+5}{x^2-4x+4}\,\mathrm{d}x=\int_4^5\left(1+\frac{1}{x-2}+3(x-2)^{-2}\right)\mathrm{d}x=\left[x+\ln|x-2|-3(x-2)^{-1}\right]_4^5=$$

$$\left[x+\ln|x-2|-\frac{3}{x-2}\right]_4^5=5+\ln(3)-1-\left(4+\ln(2)-\tfrac{3}{2}\right)=1\tfrac{1}{2}+\ln(3)-\ln(2)=1\tfrac{1}{2}+\ln\left(1\tfrac{1}{2}\right)$$

T 54 [►►58] Bereken exact.

a $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ **b** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$ **c** $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^4}{x^2+4x+3}\,\mathrm{d}x$

55 Primitiveer.

a $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2+1}$ **b** $f(x)=\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-6x+9}$ **c** $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}$

56 Primitiveer.

a $f(x)=\dfrac{x^3+x}{x^2+1}$ **b** $f(x)=\dfrac{x^3+x}{x^2-6x+9}$ **c** $f(x)=\dfrac{2x^3+1}{2x^2+x}$

57 Bereken exact.

a $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$ **b** $\displaystyle\int_0^8 \frac{x^3}{x^2+4x+4}\,\mathrm{d}x$ **c** $\displaystyle\int_0^2 \frac{4x-8}{x^2-4x-5}\,\mathrm{d}x$

R 58 De functie $f(x)=\dfrac{2x-5}{x^2-5x+6}$ is op twee manieren te primitiveren.

I Met breuksplitsen.

II Met de substitutiemethode.

Werk beide manieren uit en ga na dat de primitieven die je vindt op hetzelfde neerkomen.

K

A 59 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{10x + 5}{4x^2 - 4x + 1}$.

a Bereken exact het bereik van f.

b Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijnen $x = 1$ en $x = 3$.

A 60 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 + 5x + 4}$.

a Bereken exact de extreme waarden van f.

b De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = -6$ en snijdt de x-as in het punt B en de y-as in het punt C.
Bereken exact de oppervlakte van driehoek OBC.

c Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as, de y-as en de lijn $x = 6$.

A 61 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$.

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijn $x = 3$.

a Bereken exact de oppervlakte van V.

b Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V om de x-as wentelt.

A 62 Gegeven is de functie $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

a Er zijn twee lijnen met richtingscoëfficiënt $\frac{3}{5}$ die de grafiek van f raken.
Bereken exact de coördinaten van de raakpunten.

b Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de lijn $y = \ln(2)$.

Informatief Ontbinden met de *abc*-formule of kwadraatafsplitsen

Bij $x^2 + 2x - 4 = 0$ is $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot -4 = 20 > 0$.

De oplossingen van de vergelijking zijn $x = \dfrac{-2 - \sqrt{20}}{2} = \dfrac{-2 - 2\sqrt{5}}{2} = -1 - \sqrt{5}$ en $x = -1 + \sqrt{5}$.

Daarom is $x^2 + 2x - 4$ te ontbinden in $\left(x + 1 + \sqrt{5}\right)\left(x + 1 - \sqrt{5}\right)$.

Elke tweedegraadsfunctie met $D > 0$ is ook met behulp van kwadraatafsplitsen te ontbinden.
Zo is $x^2 + 2x - 4 = (x + 1)^2 - 5 = \left(x + 1 + \sqrt{5}\right)\left(x + 1 - \sqrt{5}\right)$. Herken in de laatste stap het merkwaardige product $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

K

Terugblik

Staartdelen

Een functie van de vorm $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ met $a_n \neq 0$ is een polynoom van graad n.

Elke functie f die het quotiënt is van twee polynomen waarbij de graad van de teller groter dan of gelijk is aan de graad van de noemer is met behulp van een staartdeling te herleiden tot de vorm $f(x) = p(x) + \dfrac{q(x)}{r(x)}$ waarbij p en q polynomen zijn en de graad van q kleiner is dan de graad van r.

Bij $f(x) = \dfrac{x^4 + 2x^3 + 4}{x^2 + 2x + 1}$ geeft de staartdeling

$f(x) = x^2 - 1 + \dfrac{2x + 5}{x^2 + 2x + 1}$.

$$
\begin{array}{rl}
x^2 + 2x + 1 \,/\, x^4 + 2x^3 \qquad\quad + 4 \,\backslash\, x^2 - 1 & \\
\underline{x^4 + 2x^3 + x^2} & - \\
-x^2 \qquad + 4 & \\
\underline{-x^2 - 2x - 1} & - \\
2x + 5 &
\end{array}
$$

Primitieven van $f(x) = \dfrac{p(x)}{ax + b}$ met p een polynoom en $a \neq 0$

Bij $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 1}{2x + 3}$ geeft de staartdeling

$f(x) = \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{4} - \dfrac{2\frac{3}{4}}{2x + 3}$.

Dus $F(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1\frac{1}{4}x - 1\frac{3}{8}\ln|2x + 3| + c$.

$$
\begin{array}{rl}
2x + 3 \,/\, x^2 + 4x + 1 \,\backslash\, \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{4} & \\
\underline{x^2 + 1\frac{1}{2}x} & - \\
2\frac{1}{2}x + 1 & \\
\underline{2\frac{1}{2}x + 3\frac{3}{4}} & - \\
-2\frac{3}{4} &
\end{array}
$$

Primitieven van $f(x) = \dfrac{l(x)}{x^2 + bx + c}$ met l een lineaire functie

We onderscheiden voor de discriminant D van de noemer drie gevallen.

I $\quad D < 0$ $f(x) = \dfrac{x + 4}{x^2 + 6x + 10} = \dfrac{\frac{1}{2}(2x + 6) + 1}{x^2 + 6x + 10} = \dfrac{\frac{1}{2}(2x + 6)}{x^2 + 6x + 10} + \dfrac{1}{(x + 3)^2 + 1}$

Dus $F(x) = \frac{1}{2}\ln|x^2 + 6x + 10| + \arctan(x + 3) + c$.

II $\quad D = 0$ $f(x) = \dfrac{2x + 5}{x^2 + 2x + 1} = \dfrac{2x + 5}{(x + 1)^2} = \dfrac{2(x + 1) + 3}{(x + 1)^2} = \dfrac{2}{x + 1} + \dfrac{3}{(x + 1)^2} = \dfrac{2}{x + 1} + 3(x + 1)^{-2}$

Dus $F(x) = 2\ln|x + 1| - 3(x + 1)^{-1} + c = 2\ln|x + 1| - \dfrac{3}{x + 1} + c$.

III $D > 0$ $f(x) = \dfrac{-6x + 14}{x^2 + 2x - 3} = \dfrac{-6x + 14}{(x - 1)(x + 3)}$

$= \dfrac{A}{x - 1} + \dfrac{B}{x + 3} = \dfrac{A(x + 3) + B(x - 1)}{(x - 1)(x + 3)}$

$= \dfrac{(A + B)x + 3A - B}{(x - 1)(x + 3)} = \dfrac{2}{x - 1} - \dfrac{8}{x + 3}$

Dus $F(x) = 2\ln|x - 1| - 8\ln|x + 3| + c$.

$$
\begin{array}{l}
\begin{cases} A + B = -6 \\ 3A - B = 14 \end{cases} + \\
4A = 8 \\
\left.\begin{array}{l} A = 2 \\ A + B = -6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 + B = -6 \\ B = -8 \end{array}
\end{array}
$$

K.5 Integralen bij parameterkrommen

O 63 Je weet $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

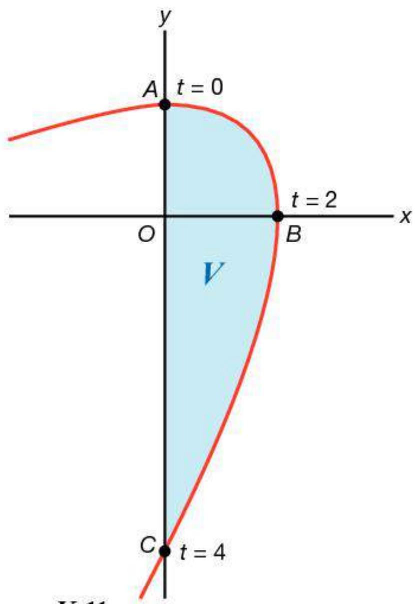
a Bewijs dat $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

b Bewijs dat $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

O 64 In figuur K.11 is de baan van punt P getekend bij de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t \\ y(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2 \end{cases}$

De baan snijdt de x-as voor $t = 2$ in het punt B en de y-as voor $t = 0$ in het punt A en voor $t = 4$ in het punt C.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de baan en de y-as.

Er geldt $O(V) = \int_{x_A}^{x_B} y\,\mathrm{d}x - \int_{x_C}^{x_B} y\,\mathrm{d}x$.



figuur K.11

a Licht toe dat hieruit volgt dat $O(V) = \int_{t=0}^{t=2} y\,\mathrm{d}x - \int_{t=4}^{t=2} y\,\mathrm{d}x$ en gebruik de regels van opgave 63 om $O(V)$ te herleiden tot $O(V) = \int_{t=0}^{t=4} y\,\mathrm{d}x$.

b Uit vraag a volgt $O(V) = \int_{t=0}^{t=4} \left(-\frac{1}{2}t^2 + 2\right)\mathrm{d}\left(-\frac{1}{2}t^2 + 2t\right)$.
Bereken $O(V)$.

c Laat met een berekening zien dat $O(V) = \int_{t=4}^{t=0} x\,\mathrm{d}y$ hetzelfde antwoord geeft als bij vraag b.

Theorie A Oppervlakten en inhouden bij parameterkrommen

In opgave 64 heb je gezien dat de oppervlakte van het vlakdeel V dat ingesloten wordt door de parameterkromme en de y-as kan worden berekend met de integraal $\int_{t=0}^{t=4} y\,\mathrm{d}x$.

Hierbij zijn de regels gebruikt, die je in opgave 63 hebt bewezen.

$$\int_a^b y\,\mathrm{d}x = -\int_b^a y\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b y\,\mathrm{d}x + \int_b^c y\,\mathrm{d}x = \int_a^c y\,\mathrm{d}x$$

K

Zoals je weet werk je bij een integraal van de vorm $\int y \, \mathrm{d}x$ altijd 'van links naar rechts' en bij een integraal van de vorm $\int x \, \mathrm{d}y$ altijd 'van beneden naar boven'. Kies de waarden van t bij de integraal zo, dat deze richtingen kloppen.

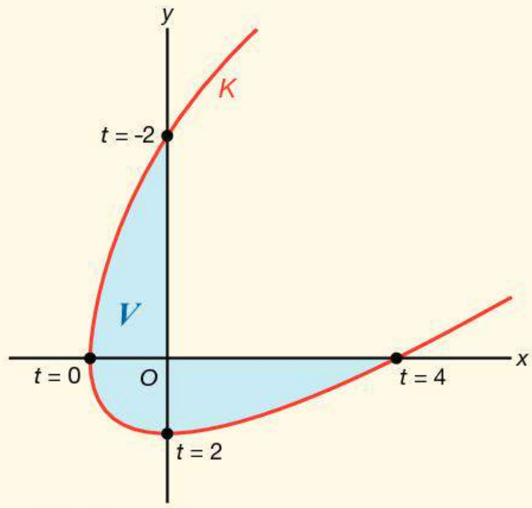
Een integraal $\int y \, \mathrm{d}x$ is dan positief als $y \geq 0$ en negatief als $y \leq 0$.

En een integraal $\int x \, \mathrm{d}y$ is dan positief als $x \geq 0$ en negatief als $x \leq 0$.

Voorbeeld

De kromme K is gegeven door $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2 \\ y(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2t \end{cases}$

Het vlakdeel V wordt ingesloten door K, de positieve x-as en de positieve y-as. Zie figuur K.12.
Bereken exact de oppervlakte van V.



figuur K.12

Aanpak

Bedenk dat $O(V) = \int_{t=0}^{t=-2} y \, \mathrm{d}x - \int_{t=0}^{t=4} y \, \mathrm{d}x$ en herleid deze vorm tot één integraal.

Uitwerking

$$O(V) = \int_{t=0}^{t=-2} y \, \mathrm{d}x - \int_{t=0}^{t=4} y \, \mathrm{d}x = -\int_{t=-2}^{t=0} y \, \mathrm{d}x - \int_{t=0}^{t=4} y \, \mathrm{d}x = -\int_{t=-2}^{t=4} y \, \mathrm{d}x =$$

$$\int_{t=4}^{t=-2} y \, \mathrm{d}x = \int_{t=4}^{t=-2} \left(\tfrac{1}{2}t^2 - 2t\right) \mathrm{d}\left(\tfrac{1}{2}t^2 - 2\right) = \int_{4}^{-2} \left(\tfrac{1}{2}t^2 - 2t\right) \cdot t \, \mathrm{d}t =$$

$$\int_{4}^{-2} \left(\tfrac{1}{2}t^3 - 2t^2\right) \mathrm{d}t = \left[\tfrac{1}{8}t^4 - \tfrac{2}{3}t^3\right]_4^{-2} = \tfrac{1}{8} \cdot (-2)^4 - \tfrac{2}{3} \cdot (-2)^3 - \left(\tfrac{1}{8} \cdot 4^4 - \tfrac{2}{3} \cdot 4^3\right) =$$

$$2 + \tfrac{16}{3} - 32 + \tfrac{128}{3} = 18$$

65 Zie het voorbeeld.

a Gebruik de regels van bladzijde 217 om aan te tonen dat

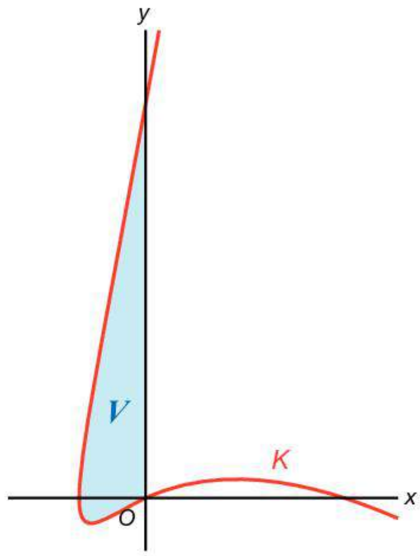
$$\int_{t=-2}^{t=4} x \, \mathrm{d}y$$ ook de oppervlakte van V oplevert.

b Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als het gedeelte van V dat zich links van de y-as bevindt wentelt om de y-as.

66 De kromme K is gegeven door $\begin{cases} x(t) = t^2 - 2t \\ y(t) = t^3 - t \end{cases}$

Het vlakdeel V wordt ingesloten door K en de y-as. Zie figuur K.13.

Bereken exact de oppervlakte van V.



figuur K.13

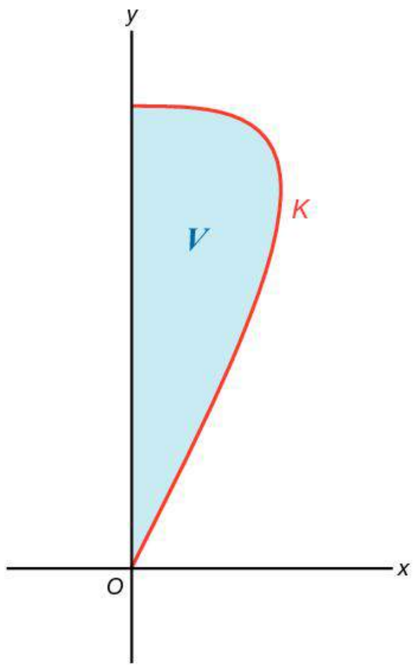
A 67 De kromme K is gegeven door $\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = t + \sin(t) \end{cases}$

met $0 \leq t \leq \pi$.

Het vlakdeel V wordt ingesloten door K en de y-as. Zie figuur K.14.

a Bereken exact de oppervlakte van V.

b Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de y-as.



figuur K.14

K

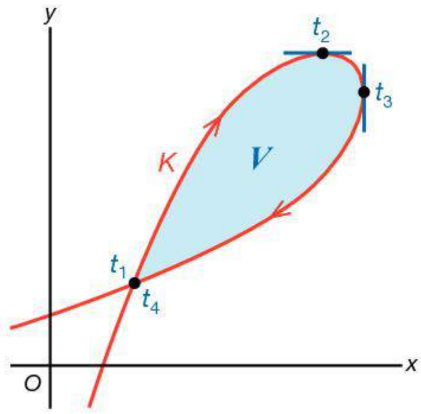
O 68 In figuur K.15 is een kromme K getekend die zichzelf snijdt voor $t = t_1$ en $t = t_4$. Zo wordt het vlakdeel V ingesloten. Dit vlakdeel wordt in negatieve richting omlopen.
We vragen ons af hoe we de oppervlakte van V kunnen berekenen.

a Licht toe dat

$$O(V) = \int_{t=t_1}^{t=t_3} y\,\mathrm{d}x - \int_{t=t_4}^{t=t_3} y\,\mathrm{d}x \text{ en herleid dit tot } \int_{t=t_1}^{t=t_4} y\,\mathrm{d}x.$$

b Licht toe dat

$$O(V) = \int_{t=t_4}^{t=t_2} x\,\mathrm{d}y - \int_{t=t_1}^{t=t_2} x\,\mathrm{d}y \text{ en herleid dit tot } \int_{t=t_4}^{t=t_1} x\,\mathrm{d}y.$$

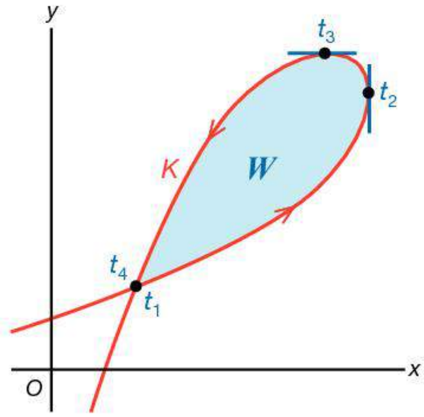


figuur K.15

In figuur K.16 is een kromme getekend die het vlakdeel W insluit. W wordt in positieve richting omlopen.

c Beredeneer dat $O(W) = \int_{t=t_4}^{t=t_1} y\,\mathrm{d}x$ en dat

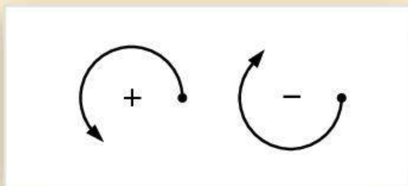
$$O(W) = \int_{t=t_1}^{t=t_4} x\,\mathrm{d}y.$$



figuur K.16

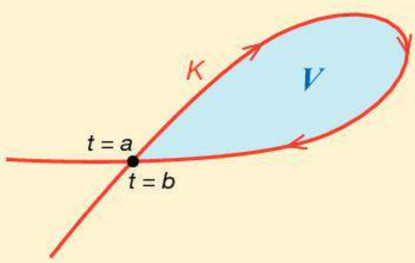
Theorie B Oppervlakten en inhouden van omsloten vlakdelen

In opgave 68 heb je onderzocht hoe je de oppervlakte kunt berekenen van een door een kromme omsloten vlakdeel V. De grenzen van de integraal waarmee je de oppervlakte berekent zijn de t-waarden die bij het punt horen waar de kromme zichzelf snijdt. Zijn deze waarden $t = a$ en $t = b$ met $a < b$, dan geldt voor de oppervlakte V



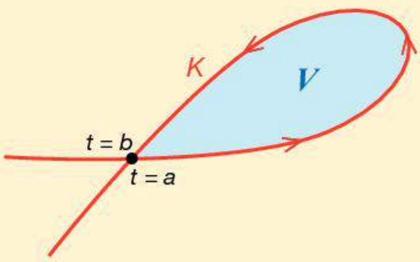
- als V in negatieve richting wordt omlopen dan geldt

$$O(V) = \int_{t=a}^{t=b} y\,\mathrm{d}x \quad \text{of} \quad O(V) = \int_{t=b}^{t=a} x\,\mathrm{d}y.$$



- als V in positieve richting wordt omlopen dan geldt

$$O(V) = \int_{t=b}^{t=a} y\,\mathrm{d}x \quad \text{of} \quad O(V) = \int_{t=a}^{t=b} x\,\mathrm{d}y.$$

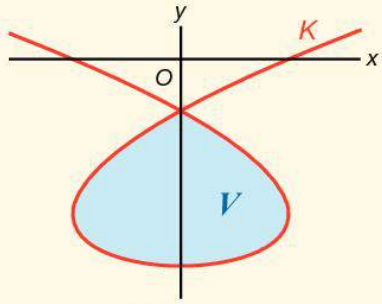


Omdat je dus altijd kunt kiezen tussen $\int x\,\mathrm{d}y$ en $\int y\,\mathrm{d}x$ neem je de integraal die het eenvoudigst te berekenen is.

K

Voorbeeld

De kromme K die gegeven is door $\begin{cases} x(t) = 3t - t^3 \\ y(t) = t^2 - 4 \end{cases}$ sluit een vlakdeel V in. Zie figuur K.17.
Bereken exact de oppervlakte van V.



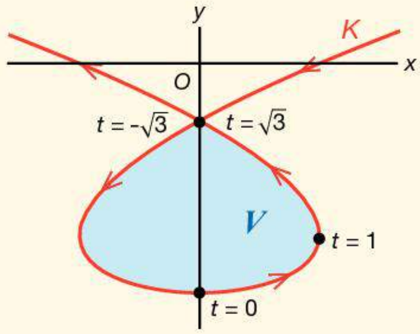
figuur K.17

Aanpak
Omdat $\int x \, \mathrm{d}y$ eenvoudiger is dan $\int y \, \mathrm{d}x$ kies je $\int x \, \mathrm{d}y$.

Bereken de grenzen t_1 en t_2 van de integraal en onderzoek of je $\displaystyle\int_{t=t_1}^{t=t_2} x \, \mathrm{d}y$ of $\displaystyle\int_{t=t_2}^{t=t_1} x \, \mathrm{d}y$ moet hebben.

Uitwerking
K snijdt de y-as voor $3t - t^3 = 0$

$$t(3 - t^2) = 0$$
$$t = 0 \vee t^2 = 3$$
$$t = 0 \vee t = \sqrt{3} \vee t = -\sqrt{3}$$



$t = 1$ geeft het punt $(2, -3)$, dus V wordt in positieve richting omlopen.

$$O(V) = \int_{t=-\sqrt{3}}^{t=\sqrt{3}} x \, \mathrm{d}y = \int_{t=-\sqrt{3}}^{t=\sqrt{3}} (3t - t^3) \, \mathrm{d}(t^2 - 4) = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3t - t^3) \cdot 2t \, \mathrm{d}t =$$

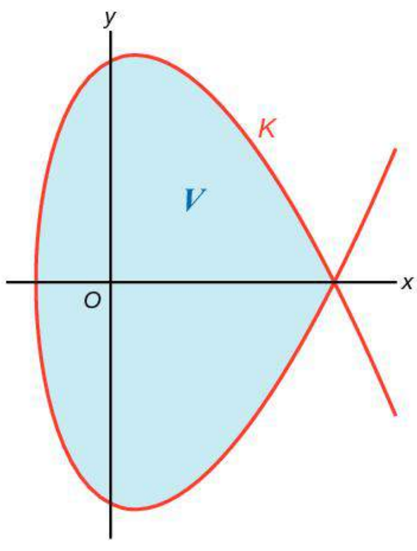
$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (6t^2 - 2t^4) \, \mathrm{d}t = \left[2t^3 - \tfrac{2}{5}t^5\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 2 \cdot 3\sqrt{3} - \tfrac{2}{5} \cdot 9\sqrt{3} - (2 \cdot -3\sqrt{3} - \tfrac{2}{5} \cdot -9\sqrt{3}) =$$

$$6\sqrt{3} - \tfrac{18}{5}\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - \tfrac{18}{5}\sqrt{3} = 4\tfrac{4}{5}\sqrt{3}$$

69 De kromme K is gegeven door $\begin{cases} x(t) = t^2 - 1 \\ y(t) = 4t - t^3 \end{cases}$

Het vlakdeel V wordt ingesloten door K.
Zie figuur K.18.

a Bereken exact de oppervlakte van V.
b Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.

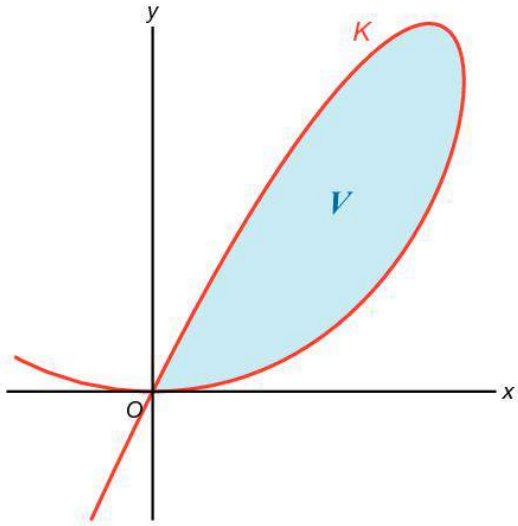


figuur K.18

70 In figuur K.19 zie je de kromme

$$K: \begin{cases} x(t) = -t^2 + 6t \\ y(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 \end{cases}$$

Bereken exact de oppervlakte van het door K omsloten vlakdeel V.



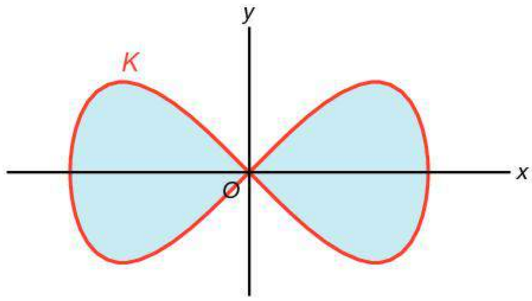
figuur K.19

A 71 De kromme K is gegeven door $\begin{cases} x(t) = 2\sin(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$

met $0 \leq t \leq 2\pi$. De kromme is symmetrisch in de x-as en in de y-as. K sluit twee vlakdelen in. Zie figuur K.20.

a Bereken exact de totale oppervlakte van deze vlakdelen.

b Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als deze vlakdelen wentelen om de x-as.



figuur K.20

A 72 De kromme K is gegeven door $\begin{cases} x(t) = 2\sin(t) \\ y(t) = \frac{1}{2}t^2 \end{cases}$

met $-\pi \leq t \leq \pi$.

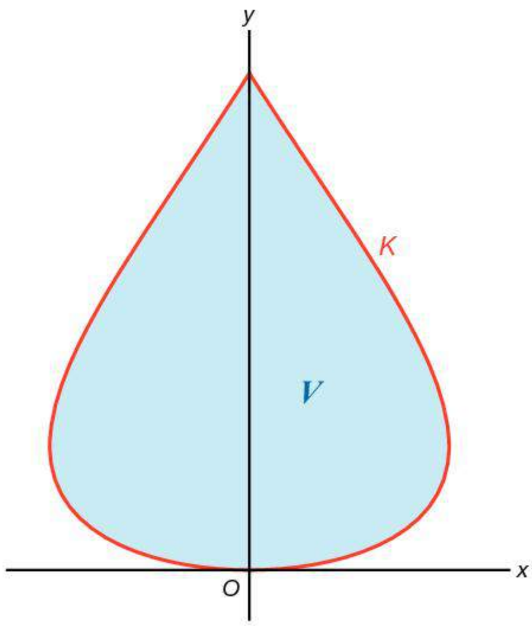
Het vlakdeel V wordt ingesloten door K.

Zie figuur K.21.

Bereken exact

a de oppervlakte van V

b de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V om de y-as wentelt.

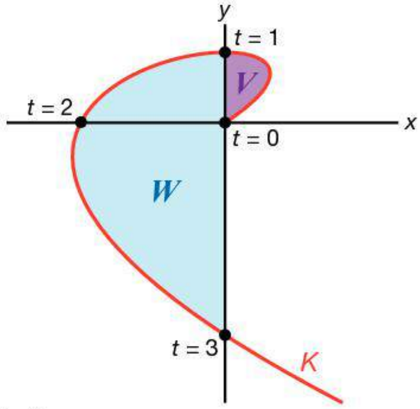


figuur K.21

K

Terugblik

Oppervlakte bij parameterkrommen



In de figuur hiernaast is de kromme $K: \begin{cases} x(t) = t^3 - 4t^2 + 3t \\ y(t) = 2t - t^2 \end{cases}$

met $t \geq 0$ getekend.
Verder zie je de vlakdelen V en W.

Er geldt $O(V) = \int\limits_{t=0}^{t=1} x\,\mathrm{d}y$, want V zit rechts van de y-as.

Verder geldt $O(W) = -\int\limits_{t=3}^{t=1} x\,\mathrm{d}y$, want W zit links van de y-as.

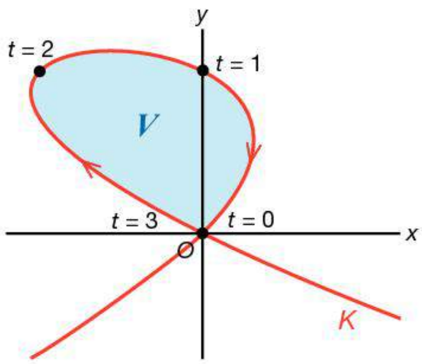
Er geldt dus $O(V+W) = \int\limits_{t=0}^{t=1} x\,\mathrm{d}y - \int\limits_{t=3}^{t=1} x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{t=0}^{t=1} x\,\mathrm{d}y + \int\limits_{t=1}^{t=3} x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{t=0}^{t=3} x\,\mathrm{d}y.$

Je krijgt

$$O(V+W) = \int\limits_{t=0}^{t=3} (t^3 - 4t^2 + 3t)\,\mathrm{d}(2t - t^2) = \int\limits_0^3 (t^3 - 4t^2 + 3t)(2 - 2t)\,\mathrm{d}t =$$

$$\int\limits_0^3 (-2t^4 + 10t^3 - 14t^2 + 6t)\,\mathrm{d}t = \left[-\tfrac{2}{5}t^5 + 2\tfrac{1}{2}t^4 - 4\tfrac{2}{3}t^3 + 3t^2\right]_0^3 = 6\tfrac{3}{10}.$$

Oppervlakte bij omsloten vlakdelen



In de figuur hiernaast is de kromme $K: \begin{cases} x(t) = t^3 - 4t^2 + 3t \\ y(t) = 3t - t^2 \end{cases}$

getekend.
K sluit het vlakdeel V in. Omdat V in positieve richting wordt omlopen bereken je $O(V)$ met de integraal $\int\limits_{t=0}^{t=3} x\,\mathrm{d}y$.

$$\int\limits_{t=0}^{t=3} x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{t=0}^{t=3} (t^3 - 4t^2 + 3t)\,\mathrm{d}(3t - t^2) = \int\limits_0^3 (t^3 - 4t^2 + 3t)(3 - 2t)\,\mathrm{d}t =$$

$$\int\limits_0^3 (-2t^4 + 11t^3 - 18t^2 + 9t)\,\mathrm{d}t = \left[-\tfrac{2}{5}t^5 + 2\tfrac{3}{4}t^4 - 6t^3 + 4\tfrac{1}{2}t^2\right]_0^3 = 4\tfrac{1}{20}$$

Diagnostische toets

K.1 De substitutiemethode

1 Primitiveer.

a $f(x) = 3x^2(x^3 + 2)^4$

b $f(x) = 3x\sqrt{x^2 + 2}$

c $f(x) = \cos(x) \cdot (1 + \sin^3(x))$

d $f(x) = 3x^2 \cos(x^3 + 2)$

e $f(x) = \dfrac{6}{(2x - 1)^3}$

f $f(x) = (4x + 6)\ln(x^2 + 3x)$

2 Bereken exact.

a $\displaystyle\int_1^{e} \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}\,dx$

b $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(x)\sin^3(x)\,dx$

c $\displaystyle\int_1^{3} \frac{6x}{x^2 + 1}\,dx$

3 Bereken exact $\displaystyle\int_0^3 x^2\sqrt{x + 1}\,dx$ met behulp van de substitutie $\sqrt{x + 1} = u$.

K.2 Partieel integreren

4 Primitiveer.

a $f(x) = 4x\sin(2x)$

b $g(x) = (2x + 3)e^x$

c $h(x) = x^2\ln(x)$

5 Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$.

a Bereken exact de extreme waarden van f.

b Bereken algebraïsch de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as.

6 Primitiveer.

a $f(x) = 4x^2\sin(2x)$

b $g(x) = (x^2 - x + 2)e^x$

c $h(x) = e^x\sin(2x)$

K.3 Cyclometrische functies

7 Bereken exact.

a $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2}{x^2 + 1}\,dx$

b $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{4}{x^2 + 4}\,dx$

c $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{x^2 - 2x + 2}\,dx$

d $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{3x^2}{x^6 + 1}\,dx$

e $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos(x)}{\sin^2(x) + 1}\,dx$

f $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\arctan^2(x)}{x^2 + 1}\,dx$

8 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 5}$.

a Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de y-as en de lijn $y = \frac{1}{2}$.

b Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijnen $x = 2$ en $x = p$ met $p > 2$ zo, dat $O(W) = \frac{1}{3}\pi$.
Bereken exact de waarde van p.

K

9 Primitiveer.

a $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 4x^2}}$ **b** $g(x) = \dfrac{5x^4}{\sqrt{1 - x^{10}}}$ **c** $h(x) = \dfrac{\arcsin^2(x)}{\sqrt{1 - x^2}}$

K.4 Breuksplitsen

10 Bereken exact.

a $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{3x + 4}{x + 4}\,dx$ **b** $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{x^2 - 2x + 4}{2x - 3}\,dx$ **c** $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{x^3 - x + 1}{x + 1}\,dx$

11 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x + 1}$.

a Bereken exact de extreme waarden van f.

b Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as.

12 Primitiveer.

a $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 + 1}$ **b** $g(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x^2 - 4x + 4}$ **c** $h(x) = \dfrac{6}{x^2 - 1}$

13 Bereken exact.

a $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{3x + 2}{x^2 + 4x + 3}\,dx$ **b** $\displaystyle\int_{3}^{4} \frac{2x + 3}{x^2 - 6x + 10}\,dx$ **c** $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{x^4}{x^2 + 9}\,dx$

K.5 Integralen bij parameterkrommen

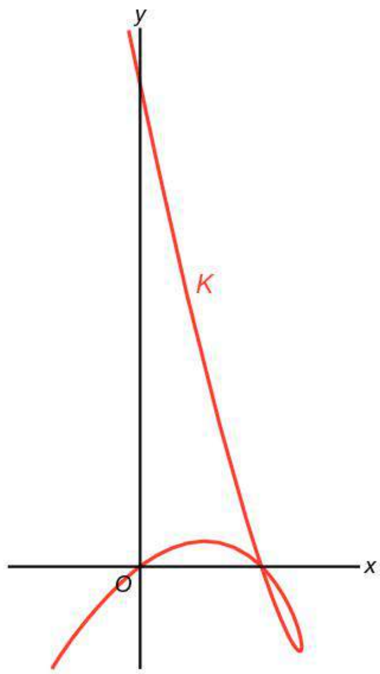
14 In figuur K.22 zie je de kromme $\begin{cases} x(t) = 4t - t^2 \\ y(t) = t^3 - 4t^2 + 3t \end{cases}$ die zichzelf snijdt op de x-as.

a Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de kromme en de y-as.

b Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel W dat wordt omsloten door de kromme.

L is het lichaam dat ontstaat als het vlakdeel dat wordt ingesloten door de kromme en de x-as wentelt om de x-as.

c Bereken de inhoud van L in twee decimalen nauwkeurig.



figuur K.22

K


We eat problems
for breakfast.
Preferably unsolved ones...
Internationale Wiskunde Olympiade
Nederland 2011

Wiskunde Olympiade

De Wiskunde Olympiade is een jaarlijkse wiskundewedstrijd voor leerlingen tot en met de vijfde klas havo/vwo die wel houden van wat wiskundige uitdaging. In januari of februari vindt de eerste ronde plaats op alle scholen die zich hebben aangemeld. Je krijgt dan 12 speelse en uitdagende opgaven voorgeschoteld waar je 2 uur de tijd voor krijgt. Voorbeelden van de opgaven van de afgelopen jaren vind je hierna. Het gaat bij de A-vragen om meerkeuzevragen en bij de B-vragen alleen maar om de eindantwoorden in exacte vorm, zoals $\frac{11}{81}$, $2 + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ of $\frac{1}{4}\boldsymbol{\pi} + 1$. Je mag geen rekenmachine of een lijst met formules gebruiken, alleen pen en papier, passer en geodriehoek.
Voor de opgaven kun je twee punten per A-vraag halen en vijf punten per B-vraag. In dit boek is aan het eind van elk jaar in een tabel opgenomen welk percentage van de deelnemers uit klas 5 vwo de betreffende opgave goed had opgelost. Verder staat erbij hoeveel punten minimaal nodig waren om uitgenodigd te worden voor de eindronde.
Sinds 2010 is er een tweede ronde die in maart regionaal wordt georganiseerd. De beste 120 à 140 van de tweede ronde worden uitgenodigd voor de eindronde, die in september van het volgende schooljaar altijd op de Technische Universiteit Eindhoven plaatsvindt. Als je bij de eindronde hoog eindigt, krijg je een uitnodiging voor een trainingsprogramma dat parallel aan je schoolwerk loopt van november tot en met juni. De beste 6 leerlingen vormen het Nederlandse team voor de Internationale Wiskunde Olympiade. Die is in 2016 in Hong Kong, in 2017 in Brazilië, in 2018 in Roemenië en in 2019 in het Verenigd Koninkrijk. Er doen zo'n 100 landen aan mee. Verder vaardigt Nederland jaarlijks teams af naar de Benelux Wiskunde Olympiade en de European Girls' Mathematical Olympiad.

Je kunt aan je wiskundedocent laten weten dat het je wel leuk lijkt om mee te doen; hij of zij kan de school dan opgeven via de site www.wiskundeolympiade.nl of via de inschrijfformulieren die elke school in september krijgt opgestuurd via de SLO.

De Wiskunde Olympiade wordt georganiseerd in samenwerking met de Technische Universiteit Eindhoven, Universiteit Leiden, Transtrend en ORTEC. Verder wordt de Wiskunde Olympiade mede mogelijk gemaakt door het Ministerie van OCW, Centraal Bureau voor de Statistiek, Compositio en Noordhoff Uitgevers en met-dank-aan-sponsors ASML, Cito, Freudenthal Instituut, Instituut Archimedes van Hogeschool Utrecht, Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, Rabobank en Shell.

2012

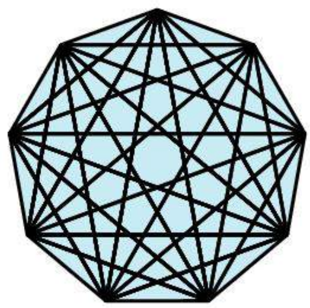
A-vragen

1 Op de plaatsen van de sterretjes staan positieve getallen op zo'n manier dat de vermenigvuldigingstabel hiernaast klopt.
Wat is het grootste getal dat meer dan één keer voorkomt in de 5 × 5-tabel?
A 6 **B** 8 **C** 9 **D** 12 **E** 18

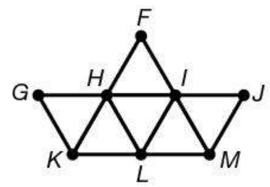
×	*	*	*	7
*	24	*	*	56
*	*	36	8	*
*	*	27	6	*
6	18	*	*	42

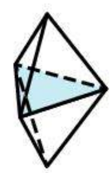
2 Een palindroomgetal is een getal dat van links naar rechts gelezen hetzelfde is als van rechts naar links gelezen, zoals 707 en 154451. Leon maakt een lijst van alle palindroomgetallen van vijf cijfers (getallen beginnen niet met een 0), gesorteerd van klein naar groot.
Wat is het 12e getal op Leons lijst?
A 11111 **B** 11211 **C** 12221 **D** 12321 **E** 12421

3 Hiernaast zie je een regelmatige negenhoek met al zijn diagonalen.
Hoeveel gelijkbenige driehoeken zijn er waarvan de drie verschillende hoekpunten ook hoekpunten van de negenhoek zijn? (Een driehoek is gelijkbenig als twee of drie zijden dezelfde lengte hebben.)
A 27 **B** 30 **C** 33 **D** 36 **E** 39



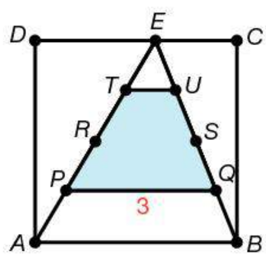
4 Hiernaast zie je een bouwplaat waarmee je een zogenaamde *dipiramide* kunt vouwen. Deze dipiramide zie je in het plaatje eronder.
Welke drie punten uit de bouwplaat worden na het vouwen hoekpunten van de blauwe driehoek?
A F, G en L **B** H, I en M **C** G, H en I **D** H, K en L **E** F, I en K





5 Frank heeft een la waarin allemaal losse sokken zitten. Er zitten 10 rode sokken in en de rest van de sokken is blauw. Hij gaat blind een aantal sokken uit de la pakken en wil daarna twee sokken van dezelfde kleur hebben. Om zeker te zijn van minstens twee rode sokken moet hij twee keer zoveel sokken pakken als om zeker te zijn van minstens twee blauwe sokken.
Hoeveel sokken zitten er in totaal in de la?
A 14 **B** 18 **C** 26 **D** 32 **E** 40

6 Op de zijde CD van een vierkant $ABCD$ ligt een punt E. Lijnstuk AE wordt door de punten P, R en T in vier gelijke stukken verdeeld. Lijnstuk BE wordt door de punten Q, S en U in vier gelijke stukken verdeeld. Gegeven is dat $|PQ| = 3$.
Wat is de oppervlakte van vierhoek $PQUT$?
A $\frac{15}{4}$ **B** 4 **C** $\frac{17}{4}$ **D** $\frac{9}{2}$ **E** 5



7 Carry heeft zes kaarten. Op elke kaart staat een positief geheel getal geschreven. Zij kiest drie kaarten en rekent de som uit van de getallen op die kaarten. Zij doet dit voor alle 20 mogelijke combinaties van drie kaarten. Tienmaal krijgt Carry als uitkomst 16 en tienmaal als uitkomst 18.
Wat is het kleinste getal dat op de kaarten voorkomt?
A 1   **B** 2   **C** 3   **D** 4   **E** 5

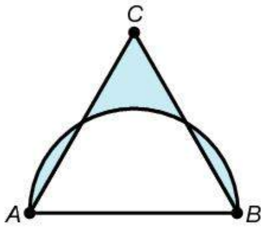
8 We bekijken een rij getallen die met 27, 1, 2012, ... begint. Voor deze rij getallen geldt het volgende. Als we de getallen op plek 1, 2 en 3 in de rij optellen, krijgen we 2040. Van de getallen op plek 2, 3 en 4 is de som 2039 en van de getallen op plek 3, 4 en 5 is de som 2038, enzovoort. Algemeen geldt dus: de getallen op plek k, $k + 1$ en $k + 2$ zijn samen $2041 - k$.
Welk getal staat op plek 2013 in de rij?
A −670   **B** −669   **C** 670   **D** 1341   **E** 1342

B-vragen

1 We bekijken alle getallen van vijf cijfers. Hiervan zijn er a met de eigenschap dat het product van de cijfers gelijk is aan 25, en b met de eigenschap dat het product van de cijfers gelijk is aan 15.

Bepaal $\frac{a}{b}$.

2 Een gelijkzijdige driehoek ABC heeft zijde 12. Een halve cirkel met middellijn AB snijdt de zijden AC en BC.
Bepaal de totale oppervlakte van het blauwe gebied dat bestaat uit de twee cirkelsegmenten buiten de driehoek en het deel van de driehoek buiten de cirkel.



3 Een aantal hokjes van een vel ruitjespapier vormt samen een rechthoek. Van deze rechthoek liggen er evenveel *wel* als *niet* aan de rand van de rechthoek.
Hoeveel hokjes telt de rechthoek in totaal? Geef alle mogelijkheden.

4 De bewerking $\diamond$ voldoet voor alle positieve getallen x en y aan de volgende drie regels.
Regel 1: $(2x) \diamond y = \frac{1}{2} + (x \diamond y)$.
Regel 2: $y^2 \diamond x = x^2 \diamond y$.
Regel 3: $2 \diamond 2 = \frac{3}{2}$.
Bereken $32 \diamond 8$.

opgave	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	B1	B2	B3	B4
percentage	84	58	23	61	56	45	35	31	35	10	18	4

De 309 vwo 5 leerlingen met een score van 20 of meer zijn uitgenodigd voor de regionale ronde.

2013

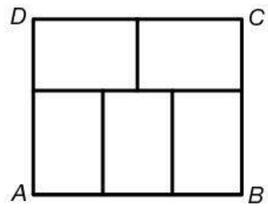
A-vragen

1 Een verkeerslicht staat om en om een bepaalde tijd op groen en op rood. De periodes groen en rood duren even lang, allebei steeds 1, 2 of 3 minuten. Er zijn vier kleurcombinaties voor het licht op de tijdstippen 12:08 en 12:09: rood-rood, rood-groen, groen-rood en groen-groen.
Hoeveel van de vier combinaties zijn mogelijk als gegeven is dat het licht om (precies) 12:05 op rood stond en om (precies) 12:12 ook op rood?

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4
E Het licht kan niet op zowel 12:05 als 12:12 rood zijn.

2 Rechthoek *ABCD* is verdeeld in vijf gelijke rechthoekjes. De omtrek van elk van deze rechthoekjes is 20.
Wat is de oppervlakte van rechthoek *ABCD*?

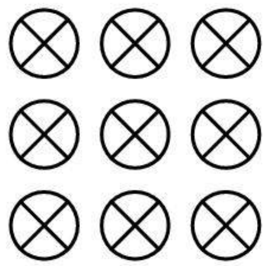
A 72 **B** 112 **C** 120 **D** 140 **E** 150



3 Voor de getallen a, b, c, d en e geldt:
$a + b + 1 = b + c - 2 = c + d + 3 = d + e - 4 = e + a + 5$.
Welk van deze vijf getallen is het grootst?

A a **B** b **C** c **D** d **E** e

4 Negen lampjes zijn in een vierkant opgesteld. Elk lampje kan *aan* of *uit* zijn. Als je op een lampje drukt, veranderen dat lampje en de lampjes in dezelfde rij of kolom van toestand: van *aan* naar *uit* of omgekeerd. In het begin zijn alle lampjes *aan*.
Wat is het kleinste aantal keren drukken dat nodig is om alle lampjes *uit* te krijgen?



A 3 **B** 4 **C** 5 **D** 9 **E** Dat kan niet.

5 Van een stapel dozen is gegeven dat een kwart van de dozen leeg is. We openen een kwart van de dozen en zien dat een vijfde daarvan niet leeg is.
Welk deel van de ongeopende dozen is leeg?

A $\frac{4}{15}$ **B** $\frac{1}{4}$ **C** $\frac{1}{15}$ **D** $\frac{1}{16}$ **E** $\frac{1}{20}$

6 Een regelmatige zeshoek en een gelijkzijdige driehoek hebben dezelfde omtrek.
Wat is de verhouding *oppervlakte zeshoek* : *oppervlakte driehoek*?

A 2 : 3 **B** 1 : 1 **C** 4 : 3 **D** 3 : 2 **E** 2 : 1

7 Wat zijn de laatste vier cijfers van 5^{2013}?

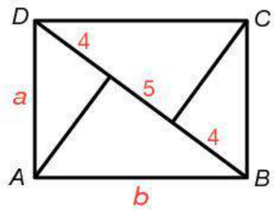
A 0625 **B** 2525 **C** 3125 **D** 5625 **E** 8125

8 Twintig leerlingen hebben een toets gemaakt. Geen twee leerlingen hebben hetzelfde aantal vragen goed beantwoord. Elke vraag was door hoogstens drie leerlingen goed beantwoord. Wat is het kleinste aantal vragen dat de toets kan hebben?
A 63 **B** 64 **C** 67 **D** 70 **E** 71

B-vragen

1 Wat is het kleinste positieve gehele getal bestaande uit de cijfers 2, 4 en 8, waarbij elk van deze cijfers minstens twee keer voorkomt en het getal niet deelbaar is door 4?

2 Een rechthoek $ABCD$ heeft zijden a en b, waarbij $a < b$. De loodlijnen uit A en C op de diagonaal BD verdelen die diagonaal in drie stukken met lengtes 4, 5 en 4.
Bereken $\frac{b}{a}$.



3 Een bus komt langs drie haltes. De middelste halte ligt even ver van de eerste halte als van de laatste halte. Fred staat bij de middelste halte en moet nog 15 minuten wachten voor de bus arriveert. Als hij naar de eerste halte fietst, zal hij daar gelijktijdig met de bus aankomen. Als hij in plaats daarvan naar de laatste halte rent, zal hij daar ook gelijktijdig met de bus aankomen. Hoe lang zou Fred erover doen om naar de laatste halte te fietsen en vervolgens naar de middelste halte terug te rennen?

4 We schrijven de getallen 1 tot en met 30 000 achter elkaar op zodat een lange rij cijfers ontstaat: 123456789101112...30000.
Hoe vaak komt 2013 in deze rij voor?

opgave	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	B1	B2	B3	B4
percentage	37	86	62	44	45	48	47	29	73	21	44	6

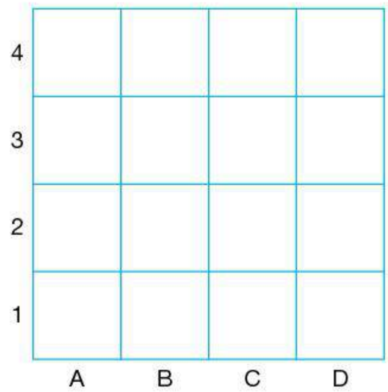
De 303 vwo 5 leerlingen met een score van 24 of meer zijn uitgenodigd voor de regionale ronde.

2014

A-vragen

1 We hebben een veld van 4 × 4 vierkante hokjes. Van deze 16 hokjes willen we er precies vier zwart kleuren. Het moet zó gebeuren dat iedere rij en iedere kolom precies één zwart hokje krijgt en er geen twee zwarte hokjes diagonaal (met een hoekpunt) aan elkaar grenzen.
Op hoeveel manieren kunnen we de vier te kleuren hokjes kiezen?

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4
E Dit kan niet.



2 In een vijver zwemmen rode en gele karpers. Twee vijfde van de karpers is geel, de rest is rood. Drie kwart van de gele karpers is een vrouwtje. In totaal zijn er evenveel vrouwtjeskarpers als mannetjeskarpers.
Welk gedeelte van de totale karperpopulatie bestaat uit rode mannetjeskarpers?

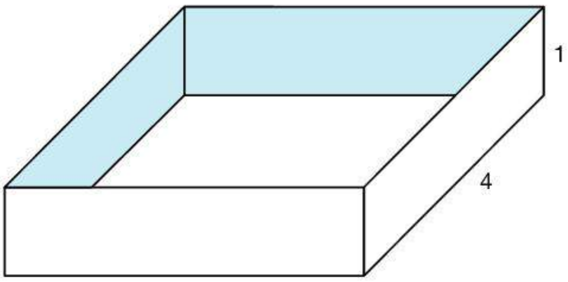
A $\frac{1}{5}$ **B** $\frac{1}{4}$ **C** $\frac{3}{10}$ **D** $\frac{2}{5}$ **E** $\frac{1}{2}$

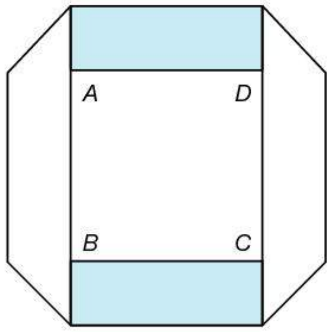
3 Zeven velden liggen naast elkaar; ze zijn van links naar rechts genummerd van 1 tot en met 7. Een kikker springt van veld naar veld. Hij kan alleen sprongen van drie of vijf velden naar links of rechts maken. Zo kan hij bijvoorbeeld vanaf veld 2 alleen naar velden 5 en 7 springen. De kikker wil een reis maken waarbij hij elk veld precies een keer aandoet. Het begin- en eindpunt van de reis zijn verschillend.

Welke velden kunnen het beginpunt zijn van zo'n reis?

A velden 1 t/m 7
B velden 1, 3, 5 en 7
C velden 3 en 5
D veld 4
E geen enkel veld

4 Een vierkante papieren ring heeft hoogte 1. De zijdes hebben lengte 4. De ring is afgebeeld in de linker figuur. Door hem op tafel plat te drukken krijgen we de rechter figuur. Hierin is vierhoek *ABCD* een vierkant.





Hoe lang is zijde *AB*?

A $\frac{5}{2}$ **B** 3 **C** $\frac{7}{2}$ **D** 4 **E** $\frac{9}{2}$

5 Dion en Jaap hebben meegedaan aan een hardloopwedstrijd. Het aantal hardlopers dat eerder dan Dion bij de finish kwam, is gelijk aan het aantal hardlopers dat na hem eindigde. Het aantal hardlopers dat eerder dan Jaap bij de finish kwam, is driemaal zo groot als het aantal hardlopers dat na hem eindigde. In de eindranglijst staan tussen Dion en Jaap nog 10 andere deelnemers. Er zijn geen hardlopers tegelijk over de finish gekomen en iedereen is gefinisht.

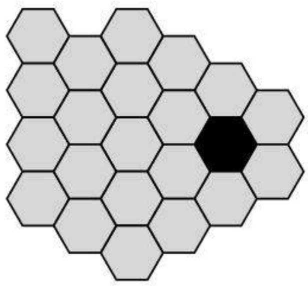
Hoeveel hardlopers deden er mee aan deze wedstrijd?

A 22 **B** 23 **C** 41 **D** 43 **E** 45

6 Een tuin met een vijver (het zwarte vakje) zal betegeld worden met zeshoekige tegels, zoals in de figuur. We hebben drie kleuren tegels: rood, groen en blauw. Het is niet toegestaan om twee tegels van dezelfde kleur tegen elkaar aan te leggen.

Op hoeveel manieren kunnen we de tuin betegelen?

A 3 **B** 6 **C** 12 **D** 18 **E** 24

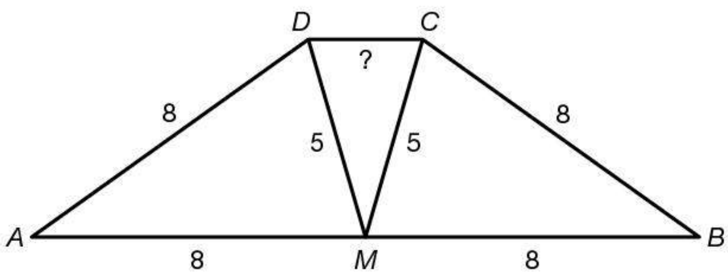


7 In de figuur hieronder is een vierhoek *ABCD* getekend. Het midden van zijde *AB* is *M*. De vier lijnstukken *AM*, *BM*, *BC* en *AD* hebben lengte 8 en de lijnstukken *DM* en *CM* hebben lengte 5.

Hoe lang is lijnstuk *CD*?

Let op: het plaatje is niet op schaal getekend.

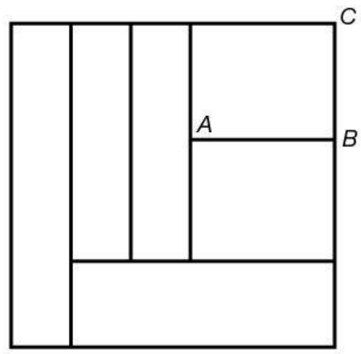
A 3 **B** $\frac{40}{13}$ **C** $\frac{25}{8}$ **D** $\frac{16}{5}$ **E** $\frac{13}{4}$



8 Een motorboot beweegt ten opzichte van het water met een constante snelheid van 25 kilometer per uur. Hij vaart van Arnhem naar Zwolle met de constante stroom mee. Op een bepaald moment heeft hij 42% van de afstand afgelegd. Vanaf dat punt kost het evenveel tijd om door te varen naar Zwolle als om terug te varen naar Arnhem.
Wat is de stroomsnelheid van het water in kilometer per uur?
A 3 **B** 4 **C** $\frac{9}{2}$ **D** 5 **E** 6

B-vragen

1 Een vierkant is verdeeld in zes rechthoeken zoals in het plaatje. Deze rechthoeken hebben niet allemaal dezelfde vorm, maar wel allemaal dezelfde oppervlakte. Gegeven is dat zijde AB lengte 5 heeft.
Wat is de lengte van BC?
Let op: het plaatje is niet op schaal getekend.



2 Karel heeft een grote hoeveelheid appels en peren. Hij wil hieruit tien stukken fruit kiezen en deze in een rij zetten. Dat moet zó gebeuren dat er tussen twee appels nergens een peer staat. De rijtjes AAAAAAAAAA en AAPPPPPPPP mogen bijvoorbeeld wel, maar de rijtjes AAPPPPPPPA en APPPPPPPAA mogen niet.
Hoeveel rijtjes kan Karel zo maken?

3 Als je de uitkomst van $\underbrace{999...99}_{\text{2014 negens}} \times \underbrace{444...44}_{\text{2014 vieren}}$ zou berekenen en daarvan vervolgens alle cijfers bij elkaar op zou tellen, welke uitkomst zou je dan krijgen?

4 We bekijken 5 × 5-tabellen met daarin 25 getallen geschreven. Hetzelfde getal mag meerdere keren voorkomen, maar in geen enkele rij of kolom staat vijf keer hetzelfde getal. We noemen zo'n tabel *mooi* als in elke rij het middelste getal het gemiddelde van de getallen in die rij is en in elke kolom het middelste getal het gemiddelde van de getallen in die kolom is. De *score* van een mooie tabel is het aantal getallen in de tabel dat kleiner is dan het getal dat precies in het midden van de tabel staat.
Wat is de kleinste mogelijke score van een mooie tabel?

opgave	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	B1	B2	B3	B4
percentage	78	75	81	32	46	23	57	61	24	15	24	6

De 376 vwo 5 leerlingen met een score van 22 of meer zijn uitgenodigd voor de regionale ronde.

Gemengde opgaven

9 Exponentiële en logaritmische functies

1 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 + {}^{3}\log(x + 4)$ en $g(x) = 3 + {}^{2}\log(x - 1)$.

a Geef van f en g het domein en de formule van de asymptoot van de grafiek.
b Schets de grafieken van f en g in één figuur.
c Los op $f(x) \geq g(x)$. Rond in het antwoord af op twee decimalen.
d Los algebraïsch op $f(x) \leq 5$.
e De grafieken snijden van de lijn $x = 6$ een lijnstuk AB af. Bereken de lengte van het lijnstuk AB in twee decimalen nauwkeurig.
f De lijn $y = 2$ snijdt de grafiek van f in het punt P en de grafiek van g in het punt Q.
Bereken algebraïsch de lengte van het lijnstuk PQ.

2 **a** Herleid de formule $A = 30 \cdot 3^{4t+2}$ tot de vorm $t = a + b \cdot {}^{g}\log(cA)$.

b Maak x vrij bij de formule $y = 2 + 3 \cdot 5^{6x-4}$.

c Maak p vrij bij de formule $q = 6 \cdot 10^{\frac{10}{p} + 6}$.

d Herleid de formule $K = 20 \cdot 3^{2t-1}$ tot de vorm $t = {}^{9}\log(cK)$.

3 Los algebraïsch op.

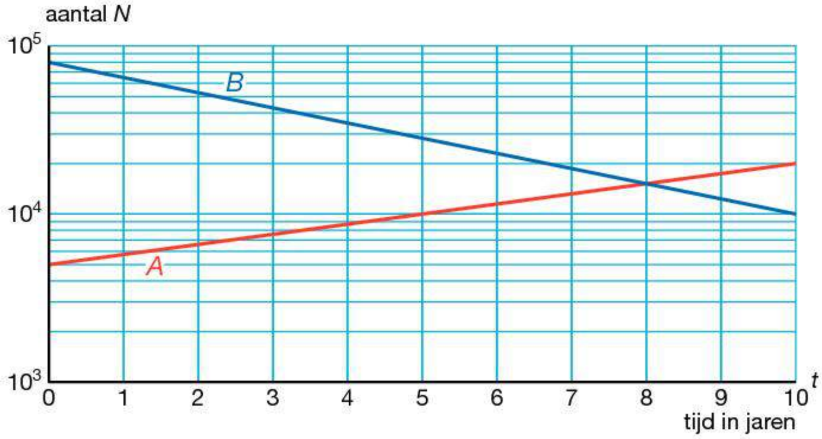
a $2 \cdot {}^{3}\log(2x - 3) + {}^{\frac{1}{3}}\log(2x + 1) = 2$
b ${}^{8}\log(2x + 1) = {}^{4}\log(25)$
c ${}^{5}\log^{2}(x + 2) = 6 \cdot {}^{5}\log(x + 2) + 7$
d $4^{\log(x)} = 2^{3 + \log(x)}$

4 Bereken exact de oplossingen.

a $9^{x} = 3^{x} + 2$
b $\log^{2}(x) + 1 = 2\frac{1}{2}\log(x)$
c $\dfrac{e^{x}}{e^{x} - 2} = 2$
d $\ln(3x + 2) = \frac{1}{2}$
e $\ln(4x) - \ln(x + 4) = 1$
f $\ln^{2}(x - 2) = 4$
g $3 \cdot 2^{2x+1} + 1 = 5 \cdot 2^{x}$
h $x \cdot 2^{-x+1} = 4x \cdot 2^{-3x+1}$

5 **a** Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 9,6% toe.
Bereken de verdubbelingstijd in maanden nauwkeurig.
b Een hoeveelheid neemt per dag met 17% af.
Bereken de halveringstijd in uren nauwkeurig.
c Een hoeveelheid verdubbelt elke maand.
Hoeveel procent is de toename per dag?
d De halveringstijd van een hoeveelheid is 8,3 dagen.
Na hoeveel dagen is er nog 1% over?

6 Door de verlaging van de grondwaterstand in een natuurgebied verandert de vegetatie. Bodembedekker A neemt in aantal toe, terwijl bodembedekker B juist afneemt. Zie figuur G.1.



figuur G.1

a Voor welke waarde van t is het aantal van soort B twee keer zo groot als het aantal van soort A?

b Bereken met behulp van differentiëren voor welke waarde van t het totale aantal bodembedekkers minimaal is. Rond af op één decimaal.

7 Differentieer.

a $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{x-1}$

b $g(x) = \ln^2(x) + \ln(x^2)$

c $h(x) = {}^2\log(x^3 - x^2)$

d $j(x) = \ln(\ln(2x))$

8 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2\mathrm{e}^x$ en $g(x) = 2\ln(x)$.

a Welke vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as levert bij de grafiek van f dezelfde beeldfiguur op als de translatie $(3, 0)$?

b Welke translatie levert bij de grafiek van g dezelfde beeldfiguur op als de vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met 3?

9 Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 - 2x)\mathrm{e}^{x+1}$.

a Bereken exact de x-coördinaten van de toppen van de grafiek van f.

b De grafiek van f snijdt de positieve x-as in A. De raaklijn aan de grafiek in A snijdt de y-as in B.
Bereken exact de oppervlakte van driehoek OAB.

c Bereken exact de x-coördinaten van de buigpunten van de grafiek van f.

d De lijn $y = ax$ met $a > 0$ snijdt de grafiek van f in O en P.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig voor welke waarde van a het punt P op de lijn $x + y = 10$ ligt.

10 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \dfrac{2 + p\ln(x)}{x}$.

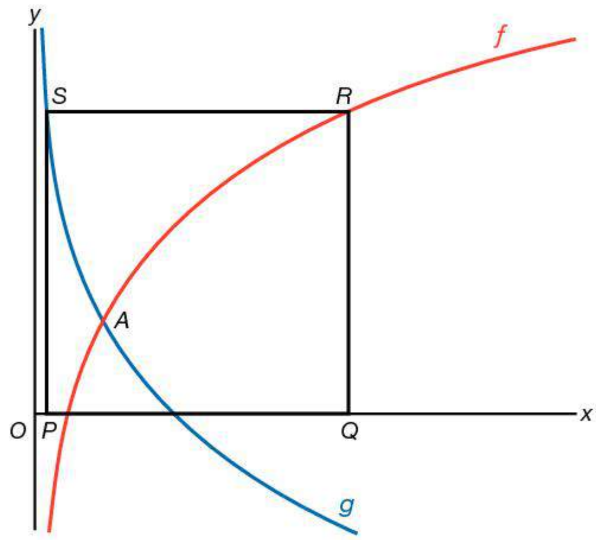
a Bereken algebraïsch de coördinaten van de top van de grafiek van f_4.

b Bereken exact voor welke waarde van p met $p > 0$ geldt $\mathrm{B}_{f_p} = \langle \leftarrow, p]$.

11 Gegeven zijn de functies $f(x) = \ln(4x)$ en $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

a De grafieken van f en g snijden elkaar in het punt A. De raaklijnen van de grafieken van f en g in het punt A snijden van de y-as een lijnstuk af.
Bereken algebraïsch de lengte van dit lijnstuk.

b In de figuur hiernaast is $PQRS$ een vierkant. De punten P en Q liggen op de x-as, het punt R ligt op de grafiek van f en het punt S ligt op de grafiek van g.
Bereken de x-coördinaat van P in drie decimalen nauwkeurig.



figuur G.2

10 Meetkunde met vectoren

12 Gegeven zijn de punten $A(2, 3)$, $B(5, -2)$, $C(8, 6)$ en $D(77, -122)$.

a Stel een vectorvoorstelling op van de lijn k door A, evenwijdig aan BC.

b Onderzoek of het punt D op de lijn AB ligt.

c Stel een vectorvoorstelling op van het lijnstuk AC.

d Voor welke waarde van p is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 22 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ een vectorvoorstelling van de lijn BC?

13 Gegeven zijn de punten $A(-3, 4)$, $B(1, 6)$ en $C(0, -1)$.

a Stel vergelijkingen op van de lijnen k_1 en k_2 die afstand 2 hebben tot het punt A en door het punt B gaan.

b Stel vergelijkingen op van de lijnen l_1 en l_2 die afstand $2\sqrt{5}$ hebben tot de lijn AB.

c Bereken de coördinaten van de punten op de lijn AB die afstand 5 hebben tot de lijn $m: 3x + 4y = 7$.

d Bereken de hoek tussen de lijnen AB en AC.

14 Gegeven zijn de lijnen $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $l: 3x + 2y = 10$.

a Bereken de coördinaten van het snijpunt van k en l.

b Stel een vergelijking op van de lijn m door $A(-1, 3)$ die k loodrecht snijdt.

c Bereken de coördinaten van de punten op k die afstand $\sqrt{13}$ hebben tot l.

d Stel een vergelijking op van de cirkel met middelpunt $M(5, 4)$ die k raakt.

15 Gegeven zijn de punten $A(4, 2)$ en $B(4, 0)$ en de cirkel $c{:}\, x^2 + y^2 = 10$.

a Stel vergelijkingen op van de lijnen k_1 en k_2 met richtingscoëfficiënt 3 die c raken.

b Stel vergelijkingen op van de lijnen l_1 en l_2 die door A gaan en c raken.

c Bereken de hoek tussen de lijnen m_1 en m_2 die door B gaan en c raken.

16 Gegeven is de cirkel $c{:}\, x^2 + y^2 - 6x - 4y = 0$.

a Stel een vergelijking op van de lijn k die de cirkel raakt in het punt $A(6, 4)$.

b Bereken de hoek tussen de lijnen l_1 en l_2 die door $B(8, 2)$ gaan en c raken.

c Stel vergelijkingen op van de lijnen m_1 en m_2 die c raken en evenwijdig zijn met de lijn n: $3x + 2y = 10$.

17 Gegeven zijn de lijnen $k{:}\, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $l{:}\, x + 3y = 12$ en $m{:}\, x = 2t - 6 \wedge y = -5t + 4$.

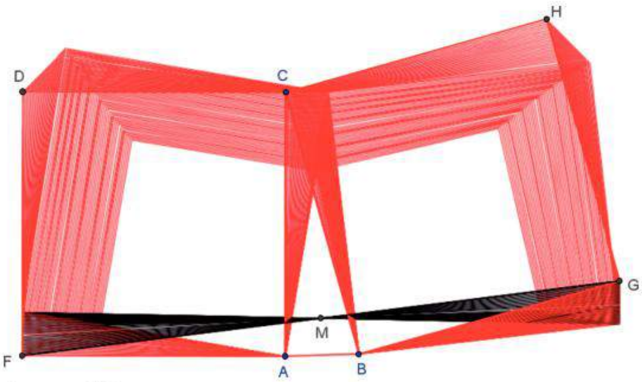
a Bereken de hoek tussen k en l.

b Bereken de coördinaten van het snijpunt van k en m.

c Stel een vergelijking op van de lijn n door de oorsprong die loodrecht staat op m.

d Bereken de coördinaten van het snijpunt van k met de lijn p door $A(6, 8)$ die loodrecht staat op l.

18 Op de zijden AC en BC van driehoek ABC worden de naar buiten gerichte vierkanten $ACDF$ en $BGHC$ geplaatst. Het punt M is het midden van lijnstuk FG. Figuur G.3 is met GeoGebra gemaakt. Voor de zijden AC en BC, de beide vierkanten en het lijnstuk FG is het spoor aangezet en vervolgens is het punt C versleept. Uit de figuur ontstaat het vermoeden dat de plaats van M onafhankelijk is van de plaats van het punt C.
Toon aan dat de plaats van M onafhankelijk is van de plaats van C.

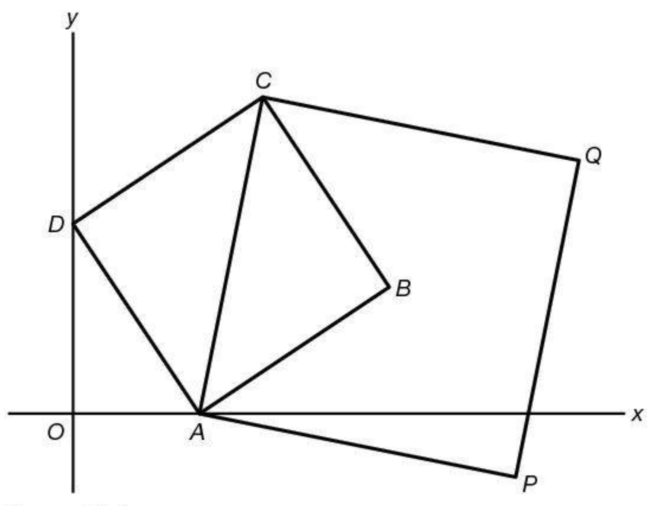


figuur G.3

19 De punten $A(a, 0)$ en $D(0, d)$ zijn hoekpunten van het vierkant $ABCD$. Hierbij is $a > 0$ en $d > 0$. Op de diagonaal AC wordt het vierkant $APQC$ geplaatst. Zie figuur G.4.
Bereken a en d zo, dat

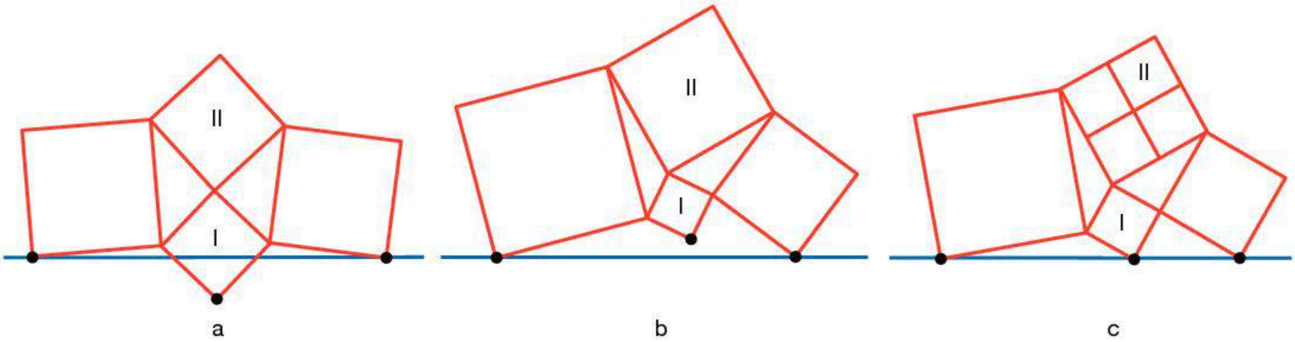
a P het punt $(10, -1)$ is

b P op de lijn $x + y = 6$ en Q op de parabool $y = \frac{1}{2}x^2$ ligt.



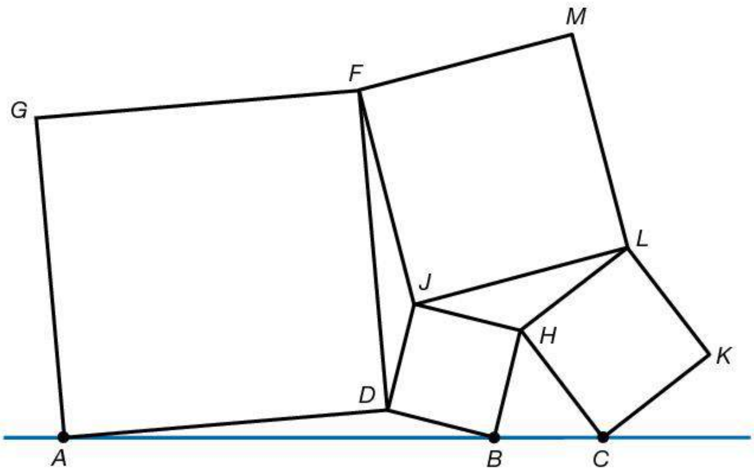
figuur G.4

20 Een sangaku is een visueel uitgebeelde stelling, meestal meetkundig van aard. In figuur G.5c zie je een sangaku over hangende vierkanten. Deze sangaku, in 1826 bedacht door Ikeda Sadakazu, is lange tijd onopgelost gebleven. De stelling gaat over de voorwaarden die je moet stellen aan de vierkanten om ervoor te zorgen dat de punten die met dikke stippen zijn aangegeven op één lijn liggen. In de sangaku wordt gesuggereerd dat vierkant II dan vier keer zo groot moet zijn als vierkant I.



figuur G.5

Zie figuur G.6 met de vierkanten *ADFG*, *BHJD*, *CKLH* en *JLMF*. Om de sangaku met vectoren te bewijzen ga je vector $\vec{f}$ op twee manieren schrijven en stel je deze vectoren aan elkaar gelijk.



figuur G.6

Kies $A(a, 0)$, $B(0, 0)$ $C(c, 0)$ en $H(p, q)$.

a Licht toe $\vec{d} = \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix}$ en $\vec{f} = \begin{pmatrix} -p-q \\ p-q-a \end{pmatrix}$.

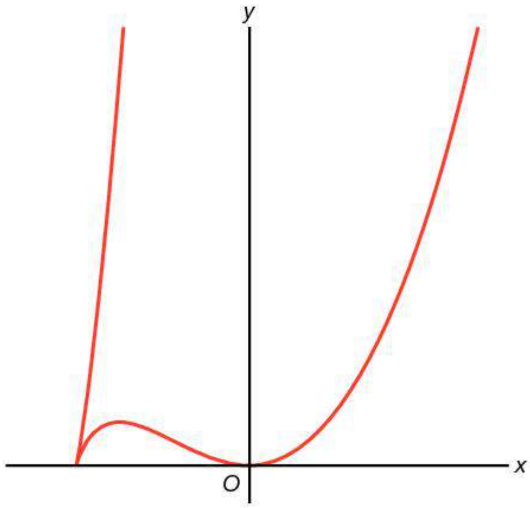
b Licht toe $\vec{j} = \begin{pmatrix} p-q \\ p+q \end{pmatrix}$ en $\vec{f} = \begin{pmatrix} 3p-q-c \\ p+3q \end{pmatrix}$.

c Toon aan dat $H = \left(\frac{1}{4}c, -\frac{1}{4}a\right)$.

d Toon aan dat de oppervlakte van *JLMF* vier keer zo groot is als de oppervlakte van *BHJD* door deze oppervlakten uit te drukken in a en c.

21 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn gegeven door $\begin{cases} x(t) = t^2 - 4t \\ y(t) = t^4 - 4t^3 + 4t^2 \end{cases}$
Zie figuur G.7.

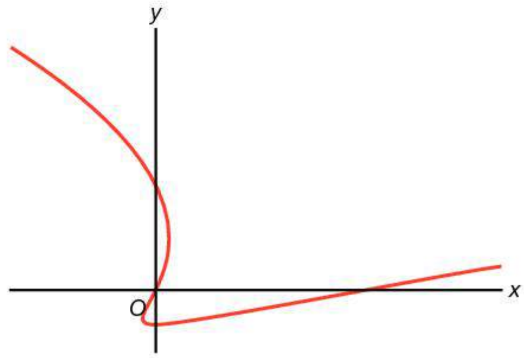
a Bereken de coördinaten van de punten waarin de raaklijn evenwijdig is met de x-as of met de y-as.
b Voor welke t beweegt het punt P zowel naar links als omhoog?
c Bereken exact de baansnelheid van P op het moment dat P door het punt $(-3, 9)$ gaat.
d Bereken in twee decimalen nauwkeurig de minimale baansnelheid van P.
e Voor welke t is de versnellingsvector evenwijdig met de lijn $y = x$?



figuur G.7

22 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn gegeven door $\begin{cases} x(t) = -t^3 + 3t^2 - 2t \\ y(t) = t^2 - 1 \end{cases}$
Zie figuur G.8.

a Bereken algebraïsch de coördinaten van de snijpunten van de baan van P met de x-as en met de y-as.
b Voor welke t is de raaklijn aan de baan van P evenwijdig met de x-as of met de y-as?
c Bereken exact de coördinaten van de punten van de baan van P waarin de raaklijn aan de baan evenwijdig is met de lijn k: $y = 2x + 3$.
d Bereken exact de baansnelheid van P in het punt $(-6, 8)$.
e Bereken exact de baanversnelling van P in het punt $\left(-\frac{3}{8}, -\frac{3}{4}\right)$.



figuur G.8

11 Integraalrekening

23 Primitiveer.

a $f(x) = 7\log(5x)$
b $f(x) = e^{\frac{1}{2}x - 1}$
c $f(x) = 10\ln(2x - 4)$
d $f(x) = 2\ln(x - 3)$
e $f(x) = \dfrac{x^4 - 6x^2\sqrt{x} + 8x}{x^3}$
f $f(x) = (x^2 + 3)^2$
g $f(x) = 3\sin(4x)$
h $f(x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\pi\right)$

24 Primitiveer.

a $f(x) = \sqrt{6x + 3}$
b $f(x) = \dfrac{10}{2x - 1}$
c $f(x) = (3x - 6)^{-2}$
d $f(x) = (2x + 5)^{-1}$
e $f(x) = 10^{2x - 3}$
f $f(x) = \dfrac{8^x - 1}{2^x}$

25 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{2x}$ met domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$.

a De lijn $y = 3\frac{1}{4}$ en de grafiek van f sluiten het vlakdeel V in. Bereken exact de oppervlakte van V.

b De x-as en de lijnen $x = 1$, $x = 3$ en $y = p$ sluiten een rechthoek in. De grafiek van f verdeelt deze rechthoek in twee delen met gelijke oppervlakte. Bereken de exacte waarde van p.

26 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + p$.

a Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f_p en de raaklijn van deze grafiek in zijn snijpunt met de y-as. Bereken exact de oppervlakte van V.

b De grafiek van f_p raakt de x-as in het punt A met $x_A > 0$. Bereken met behulp van integreren de oppervlakte van het vlakdeel W dat wordt ingesloten door de grafiek van f_p en de x-as.

27 Gegeven is de cirkel c: $x^2 + y^2 = r^2$. Bij wentelen van c om de x-as ontstaat de bol B.

a Het vlakdeel V wordt ingesloten door c en de lijnen $x = \frac{1}{3}r$ en $x = \frac{1}{2}r$. Druk de inhoud van de bolschijf die ontstaat als V om de x-as wentelt uit in r.

b Het vlakdeel W wordt ingesloten door c en de lijnen $x = -pr$ en $x = pr$ met $0 < p < 1$. Bereken in twee decimalen nauwkeurig voor welke waarde van p de inhoud van het lichaam dat ontstaat als W om de x-as wentelt gelijk is aan de helft van de inhoud van B.

28 Gegeven is de cirkel c: $x^2 + y^2 = 25$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door c en de lijnen $y = 3$ en $y = 4$.
Bij wentelen van V om de x-as ontstaat het lichaam L.
Bereken exact de inhoud van L.

29 Gegeven zijn de functies $f_a(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x + a$.

a Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f_0, de x-as en de lijn $x = p$ met $0 < p < 2\sqrt{3}$. De oppervlakte van V is $11\frac{1}{4}$. Bereken p exact.

b Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f_a, de x-as, de y-as en de lijn $x = 3$. De oppervlakte van W is $5\frac{1}{4}$. Bereken a exact.

30 Gegeven zijn de functies $f(x) = e^{2x}$ en $g(x) = e^{-x}$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de grafiek van g en de lijn $y = e$.
Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de lijn $y = e$.

31 Een wielrenner moet bij een snelheid van 54 km/uur plotseling remmen voor een stilstaande auto. Op $t = 0$ is de wielrenner op 40 meter afstand van de auto en begint hij te remmen. Neem aan dat de versnelling tijdens het remmen constant is en de wielrenner precies voor de auto tot stilstand komt.

a Bereken de versnelling van de wielrenner in m/s^2.

De auto blijkt niet stil te staan maar te rijden met een snelheid van 6 km/uur in dezelfde richting als de wielrenner. Om het risico tijdens het remmen ten val te komen te verkleinen mag de versnelling van de wielrenner niet kleiner zijn dan $-2{,}5$ m/s^2.

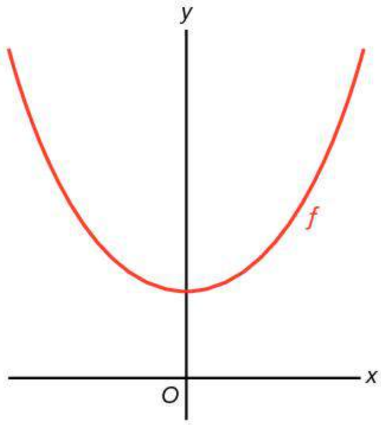
b Onderzoek algebraïsch of de wielrenner veilig op tijd voor de auto kan stoppen.

32 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de y-as, de x-as en de lijn $x = 1$.

a Bereken exact de oppervlakte van V.

b Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.

c Toon aan dat $\sqrt{1 + (f'(x))^2} = f(x)$ en bereken exact de omtrek van V.

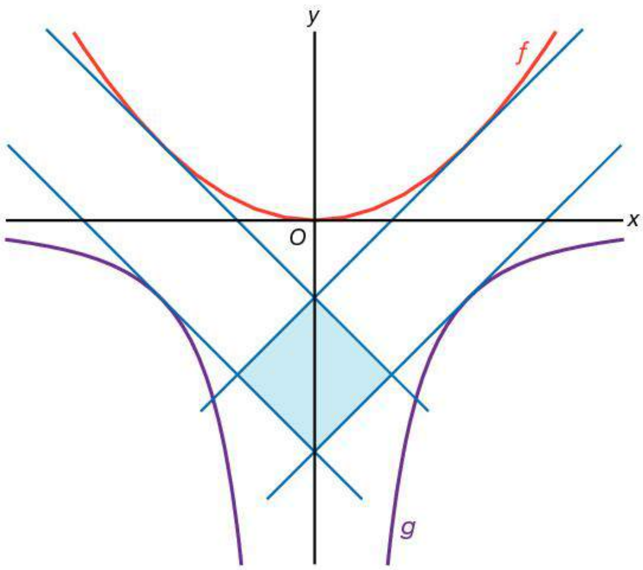


figuur G.9

33 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ en $g(x) = -\dfrac{4}{x^2}$.

De raaklijnen aan de grafieken van f en g met richtingscoëfficiënt 1 en richtingscoëfficiënt -1 sluiten een vierkant in. Zie figuur G.10.

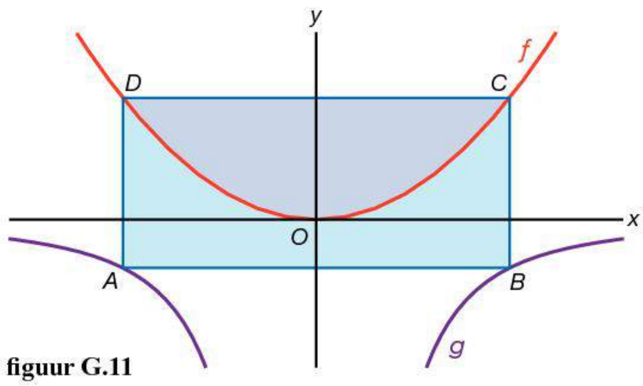
a Bereken de lengte van de diagonaal van dit vierkant.



figuur G.10

De lijn $x = a$, met $a > 0$, snijdt de grafiek van f in C en de grafiek van g in B. De lijn $x = -a$ snijdt de grafiek van f in D en de grafiek van g in A. De grafiek van f deelt de rechthoek $ABCD$ in twee stukken met gelijke oppervlaktes. Zie figuur G.11.

b Bereken exact de waarde van a.

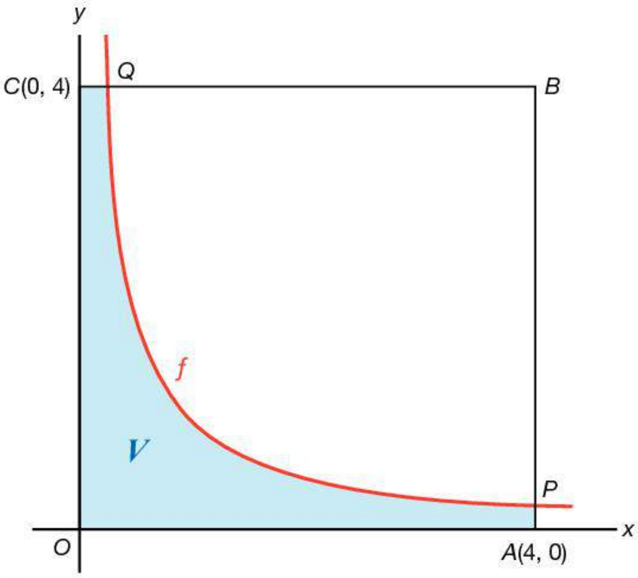


figuur G.11

34 Van een vierkant $OABC$ met zijde 4 ligt A op de positieve x-as en C op de positieve y-as. Verder is gegeven de functie $f(x)=\dfrac{1}{x}$. De grafiek van f snijdt de zijde AB van het vierkant in het punt P en de zijde BC in het punt Q. De grafiek van f verdeelt het vierkant in twee stukken. Eén van die stukken is in figuur G.12 gekleurd. Dat stuk noemen we V.

a Bereken de omtrek van V in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken exact de oppervlakte van V.



figuur G.12

12 Goniometrische formules

35 Los exact op.

a $\sin(x)\cos(x)=\frac{1}{4}$

b $\cos\left(x-\frac{1}{3}\pi\right)=\sin(2x)$

c $\cos\left(x+\frac{1}{3}\pi\right)=-\sin(x)$

d $\cos(2x)-\sin^2(x)=\frac{1}{4}$

36 Primitiveer.

a $f(x)=\sin^2(2x)+\sin(2x)\cos(2x)$

b $f(x)=\cos(x)+\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right)$

c $f(x)=4\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right)$

d $f(x)=(1-2\sin(x))^2$

37 Gegeven is de functie $f(x)=\sin(x)-\cos(x)+\sqrt{2}$.

a Toon aan dat de grafiek van f de x-as raakt.

b Toon aan dat de grafiek van f puntsymmetrisch is in $\left(\frac{1}{4}\pi, \sqrt{2}\right)$.

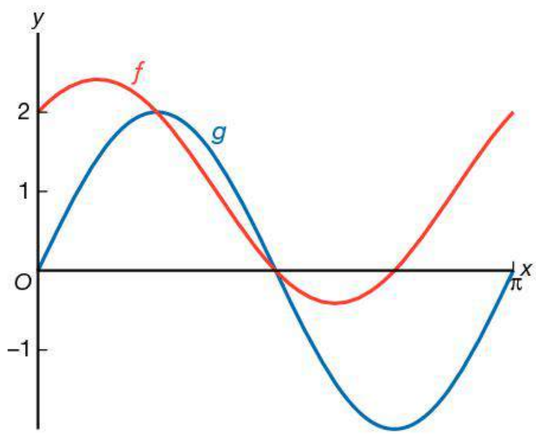
c Toon aan dat de lijn $x=\frac{3}{4}\pi$ een symmetrieas is van de grafiek van f.

38 Gegeven zijn de functies $f(x)=2\cos^2(x)+\sin(2x)$ en $g(x)=2\sin(2x)$, beide met domein $[0,\pi]$.
In figuur G.13 zie je de grafieken van f en g.

a Toon aan dat $f(x)$ geschreven kan worden als $f(x)=\cos(2x)+\sin(2x)+1$ en bereken exact het bereik van f.

b Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van f en g.
Bereken exact de oppervlakte van V.

c De lijn $x=p$ snijdt de x-as in het punt A, de grafiek van f in het punt B en de grafiek van g in het punt C zo, dat C het midden is van het lijnstuk AB.
Toon aan dat $\tan(p)=\frac{1}{3}$.



figuur G.13

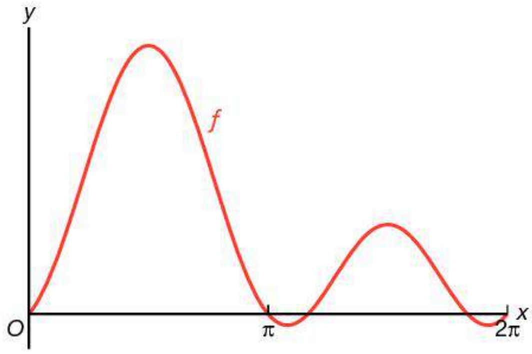
39 Gegeven is de functie $f(x) = 2\sin^2(x) + \sin(x)$ met domein $[0, 2\pi]$.

a Bereken exact de nulpunten van f.

b Bereken exact de oppervlakte van het grootste vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as.

c Bereken algebraïsch voor welke p de vergelijking $f(x) = p$ precies vier oplossingen heeft.

d Bereken in twee decimalen nauwkeurig de lengte van de grafiek van f.



figuur G.14

40 Op het waterrad van de foto zijn op gelijke afstand van elkaar zes bamboekokers bevestigd. De as van het rad bevindt zich 0,8 m boven het wateroppervlak en de straal van het rad is 1,1 m. De kokers bewegen met een snelheid van 0,5 m/s.

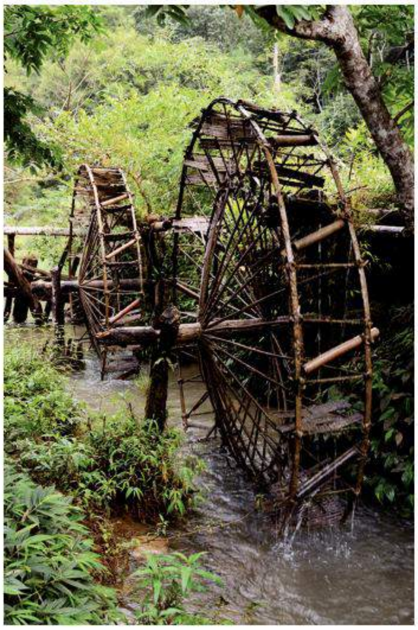
a Bereken de hoeksnelheid van de kokers.

We brengen in een aanzicht van het rad een assenstelsel aan zo, dat de as van het rad samenvalt met het punt (0; 0,8) en dat op $t = 0$ de voorste koker zich in het punt (−1,1; 0,8) bevindt.

b Stel de bewegingsvergelijkingen op van de voorste koker.

c Stel de bewegingsvergelijkingen op van de volgende koker.

d Bereken in tienden van seconden nauwkeurig hoe lang een koker per omwenteling onder water is.



41 Drie a-snaren van een piano worden in trilling gebracht. De uitwijkingen worden gegeven door $u_1 = 0{,}05\sin(880\pi t)$, $u_2 = 0{,}1\sin(880\pi t - 0{,}4\pi)$ en $u_3 = 0{,}2\sin(884\pi t)$.

a Stel de formule op van $u_4 = u_1 + u_2$ in de vorm $u = b\sin(ct - d)$. Rond b en d af op twee decimalen.

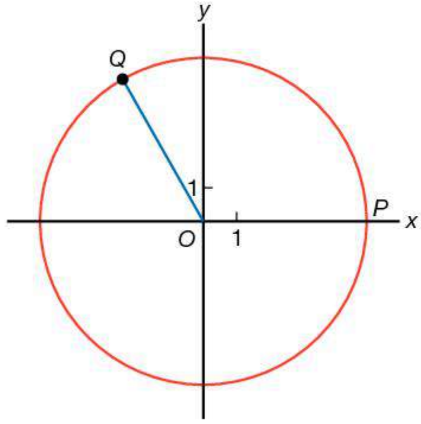
b Licht toe dat de trilling beschreven door $u = 2u_1 + u_2 + u_3$ geen harmonische trilling is.
Bereken de periode van deze trilling.

42 Op het tijdstip $t = 0$ beginnen de punten P en Q met een eenparige cirkelbeweging. De bewegingsvergelijkingen

zijn voor P: $\begin{cases} x(t) = 5\cos\left(\frac{11}{10}t\right) \\ y(t) = 5\sin\left(\frac{11}{10}t\right) \end{cases}$

en voor Q: $\begin{cases} x(t) = 5\cos\left(t + \frac{2}{3}\pi\right) \\ y(t) = 5\sin\left(t + \frac{2}{3}\pi\right) \end{cases}$ met t in seconden.

In figuur G.15 staat de beginsituatie getekend.
Tijdens de beweging wordt Q telkens door P ingehaald.
Het punt M is het midden van het lijnstuk PQ.



figuur G.15

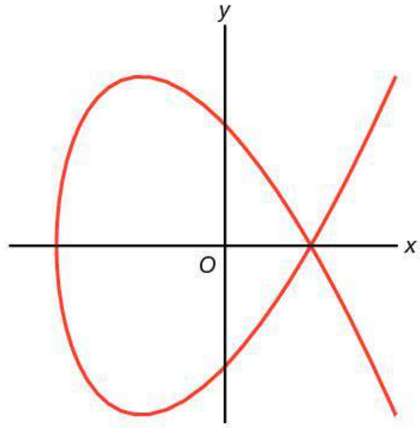
a Bereken exact na hoeveel seconden Q voor het eerst door P wordt ingehaald.

b Bereken in twee decimalen nauwkeurig na hoeveel seconden de lengte van het lijnstuk PQ voor het eerst gelijk is aan 1.

c Bereken exact na hoeveel seconden M voor het eerst door O gaat.

d Met welke snelheid passeert M het punt O? Geef het antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

43 De baan van een punt P is gegeven door $\begin{cases} x(t) = \cos(2t) \\ y(t) = \cos(3t) \end{cases}$ met t op $[0, \pi]$. De baan van P is symmetrisch in de x-as. Zie figuur G.16.



figuur G.16

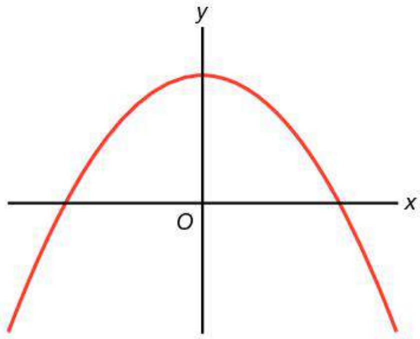
a Bereken in graden nauwkeurig de hoek waaronder de baan van P zichzelf snijdt op de x-as.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn k aan de baan in het snijpunt met de positieve y-as.

c Bereken exact de baansnelheid waarmee P de negatieve x-as passeert.

d De lijn $x = p$ snijdt de kromme in de punten A en B zo, dat $d(A, B) = 1$.
Bereken de waarden van p in twee decimalen nauwkeurig.

44 De baan van een punt P is gegeven door
$\begin{cases} x(t) = 3\cos\left(t + \frac{1}{2}\pi\right) \\ y(t) = 2\cos(2t) \end{cases}$ met t op $\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$.
Zie figuur G.17.



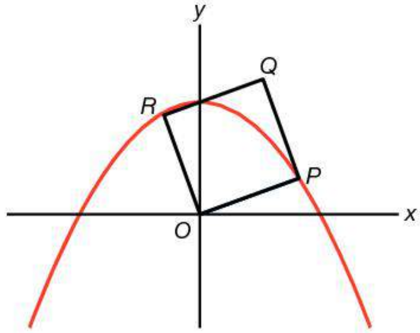
figuur G.17

a Bereken de hoek waaronder de baan van P de positieve x-as snijdt.

b Bereken exact de baansnelheid waarmee P de positieve x-as passeert.

c Toon aan dat de baan van P een deel van een parabool is.

Het lijnstuk OP is een zijde van het vierkant $OPQR$. Zie figuur G.18.



figuur G.18

d Stel de bewegingsvergelijkingen op van Q.

e Bereken in twee decimalen nauwkeurig de oppervlakte van $OPQR$ op het moment dat Q de y-as passeert.

K Voortgezette integraalrekening

45 Primitiveer.

a $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - 4x + 8}$

b $f(x) = 3x^2 \sin(x^3)$

c $f(x) = \cos(x) \cdot \sqrt[3]{1 + \sin(x)}$

d $f(x) = (2x + 4) \cdot \cos(2x)$

e $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{16 - x^2}}$

f $f(x) = \dfrac{2x+4}{\sqrt{-x^2 - 4x - 3}}$

g $f(x) = \dfrac{2x+7}{x^2 + 6x + 8}$

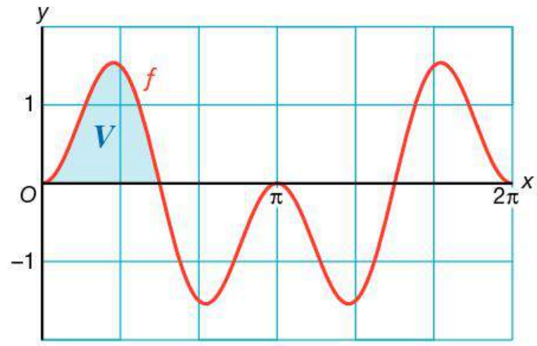
46 Gegeven is de functie $f(x) = 4\sin^2(x)\cos(x)$ met domein $[0, 2\pi]$. V is het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as tussen $x = 0$ en $x = \frac{1}{2}\pi$. Zie figuur G.19.

a Toon met behulp van differentiëren aan dat de grafiek van f de x-as raakt.

b Stel algebraïsch de formule op van de raaklijn van de grafiek van f in het punt A met $x_A = \frac{1}{2}\pi$.

c Bereken algebraïsch de oppervlakte van V.

d Bereken in twee decimalen nauwkeurig de omtrek van V.



figuur G.19

47 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$.

a Bereken algebraïsch voor welke waarden van a de lijn $y = ax$ de grafiek van f in precies drie punten snijdt.

b Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de y-as en de lijn $y = \frac{2}{3}$.

48 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^3 + 10x}{x^2 + 1}$.

a Bereken exact de coördinaten van de toppen van de grafiek van f.

b Stel algebraïsch de formule op van de raaklijn van de grafiek van f in het punt A met $x_A = 1$.

c Voor welke waarden van p heeft de vergelijking $f(x) = p$ precies één oplossing?

d Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijn $x = 3$.

49 Gegeven is de functie $f(x) = (2x^2 + x - 1)\,e^x$.

a Bereken exact de coördinaten van de toppen van de grafiek van f.

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as.

b Bereken exact de oppervlakte van V.

c De lijn $x = p$ verdeelt V in twee delen met gelijke oppervlakte. Bereken p in drie decimalen nauwkeurig.

d Bereken de omtrek van V in drie decimalen nauwkeurig.

50 **a** Bereken de primitieven van $f(x) = x^3 \ln(x)$.

b Bereken de primitieven van $f(x) = x \ln(x^3)$.

c Leid een algemene formule af voor de primitieven van de functies $f_n(x) = x^n \ln(x)$ met $n \neq -1$.

d Leid een algemene formule af voor de primitieven van de functies $f_m(x) = x \ln(x^m)$.

51 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = 2 \ln^2(x) - 2p \ln(x)$ met $p \neq 0$.

a Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f_1 en de x-as.

b Bereken algebraïsch voor welke waarde van p de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as gelijk is aan 8.

52 Gegeven zijn de functies $f(x) = x + e^{-x}$.

a Bereken algebraïsch het bereik van f.

b Bereken exact voor welke waarde van p de oppervlakte van het vlakdeel V_p dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijnen $x = p$ en $x = -p$ gelijk is aan 6.

c Bereken exact de inhoud van het lichaam dat ontstaat als het vlakdeel W dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as, de y-as en de lijn $x = -1$ wentelt om de x-as.

53 **a** Bereken de primitieven van $f(x) = \dfrac{1}{e^x + 1}$ door teller en noemer te vermenigvuldigen met e^{-x}.

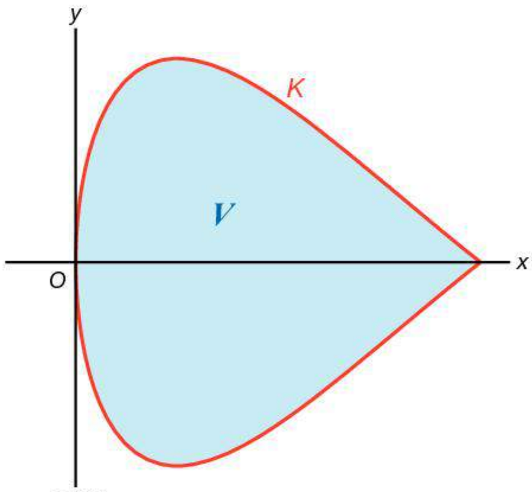
b Bereken de primitieven van $f(x) = (x^3 - 3x + 2)\,e^{2x}$ door $F(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\,e^{2x}$ te differentiëren.

c Bereken de primitieven van $f(x) = \dfrac{\ln(\sin(x))}{\cos^2(x)}$ met behulp van partieel integreren.

d Bereken de primitieven van $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ met behulp van partieel integreren en breuksplitsen en gebruik dat $-x^2 = 1 - x^2 - 1$.

e Bereken de primitieven van $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 16}}{x}$ met behulp van de substitutie $\sqrt{x + 16} = u$.

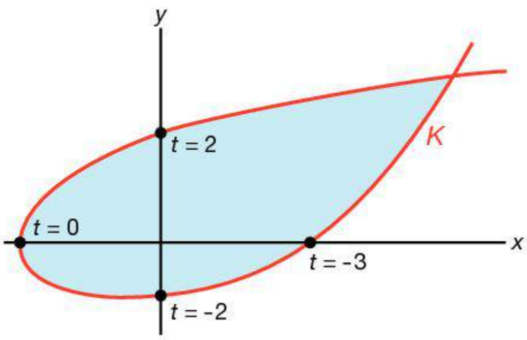
54 De kromme K is gegeven door $\begin{cases} x(t) = 4t^2 \\ y(t) = 2\sin(\pi t) \end{cases}$
met $-1 \leq t \leq 1$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door K. Zie figuur G.20.
Bereken exact
a de oppervlakte van V
b de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.



figuur G.20

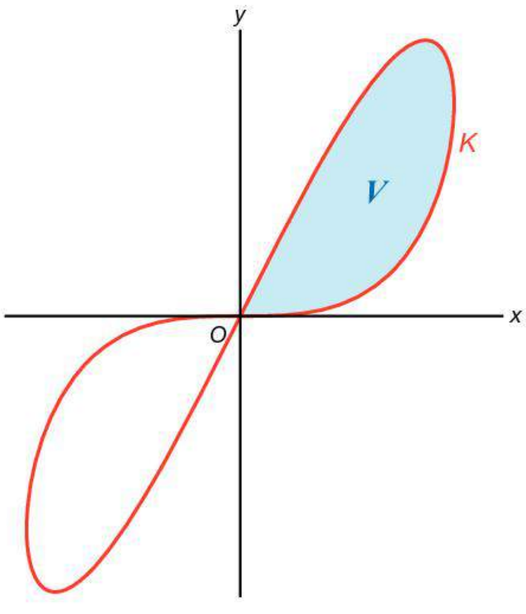
55 De kromme K is gegeven door $\begin{cases} x(t) = t^2 - 4 \\ y(t) = t\ln(t+4) \end{cases}$

K snijdt zichzelf op de lijn $x = 11$.
a Toon dit aan.
b Bereken exact de oppervlakte van het door K omsloten vlakdeel.



figuur G.21

56 De kromme K is gegeven door
$\begin{cases} x(t) = 4\sin(t) \\ y(t) = 4\sin(t) - 2\sin(2t) \end{cases}$
Zie figuur G.22. V is het rechtervlakdeel dat wordt omsloten door K.
a Bereken exact de oppervlakte van V.
b Bereken in twee decimalen nauwkeurig de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.



figuur G.22

Overzicht GR-handleiding

Module

Berekeningen op het basisscherm ▪ Het basisscherm ▪ Eenvoudige berekeningen ▪ Mintekens ▪ Haakjes ▪ Tussenstappen De toets ANS ▪ Fouten verbeteren De toets ENTRY / REPLAY ▪ Breuken invoeren ▪ Decimaal getal omzetten in breuk ▪ Breuken vermenigvuldigen	vwo B deel 1 hoofdstuk 1 bladzijde 10
Formules, grafieken en tabellen ▪ Formules invoeren ▪ Grafieken plotten ▪ Het standaardscherm ▪ Formules uitzetten ▪ De trace-cursor ▪ Functiewaarden berekenen met de trace-cursor ▪ Functiewaarden berekenen op het basisscherm ▪ Tabellen maken ▪ Tabelinstelling veranderen	vwo B deel 1 hoofdstuk 1 bladzijde 39
Toppen en snijpunten ▪ Toppen van grafieken ▪ Snijpunten van grafieken ▪ Berekenen van nulpunten	vwo B deel 1 hoofdstuk 1 bladzijde 39
Helling ▪ De richtingscoëfficiënt van een raaklijn	vwo B deel 1 hoofdstuk 2 bladzijde 60
Het gebruik van Ans en lettergeheugens ▪ De toets ANS ▪ Het gebruik van lettergeheugens	vwo B deel 1 hoofdstuk 4 bladzijde 141
Integreren ▪ Integralen berekenen op het basisscherm ▪ Integralen berekenen op het grafiekenscherm	vwo B deel 3 hoofdstuk 11 bladzijde 140
Allerlei ▪ Specifieke mogelijkheden van het merk/type GR	

Trefwoordenregister

V

Verantwoording

Fotoresearch: B en U International Picture Service, Amsterdam
Illustratieverwerving: Haasart, Wim de Haas, Rhenen
Technisch tekenwerk: OKS, Delhi (India)

Foto's
Hollandse Hoogte, Amsterdam: blz. 6–7, 184–185
Getty Images: blz. 14, 142, 146–147
Reuters: blz. 30, 31
Imageselect, Wassenaar: blz. 41, 166
Picture-Alliance, Frankfurt: blz. 54–55
Hollandse Hoogte, Amsterdam: blz. 98
ANP Photo, Rijswijk: blz. 104–105, 193, 245
Wikipedia: blz. 115
NASA: blz. 139
Michael Nicholson / Corbis, Amsterdam: blz. 155
Smithsonian Libraries: blz. 170
Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade, Arnhem: blz. 226, 227

Colofon
Omslagontwerp: In Ontwerp, Assen
Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer
Lay-out: OKS, Delhi(India)

FSC
www.fsc.org
MIX
Papier van verantwoorde herkomst
FSC® C118189

7 / 18

ISBN 978-90-01-84234-5

GETAL&
RUIMTE

J.H. Dijkhuis
C.J. Admiraal
J.A. Verbeek
G. de Jong
H.J. Houwing
J.D. Kuis
F. ten Klooster
S.K.A. de Waal
J. van Braak
J.H.M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M.L.M. van Maarseveen
R.D. Hiele
J.E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
I. Cornelisse

Noordhoff Uitgevers

ISBN 978-90-01-84234-5
9 789001 842345

www.getalenruimte.noordhoff.nl